ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Ο μαθητής Α έχει μέση βαθμολογία $\bar{x}_A = \frac{16+14+15+18+17}{5} = \frac{80}{5} = 16$, ενώ ο μαθητής Β έχει μέση βαθμολογία $\bar{x}_B = \frac{14+16+17+16+\lambda}{5} = \frac{63+\lambda}{5}$. Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι $\frac{63+\lambda}{5} = 16 \Leftrightarrow 63+\lambda = 80 \Leftrightarrow \lambda = 17$.

β.

$$S_A^2 = \frac{(16-16)^2+(16-14)^2+(16-15)^2+(16-18)^2+(16-17)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+1+4+1}{5} = 2, \text{ και}$$

$$S_B^2 = \frac{(16-14)^2+(16-16)^2+(16-17)^2+(16-16)^2+(16-17)^2}{5} =$$

$$= \frac{4+1+1}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$$

γ. Οι συντελεστές μεταβλητότητας της βαθμολογίας των δυο μαθητών είναι:

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{2}}{16} \quad \text{και} \quad CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{1,2}}{16}.$$

Προφανώς ο μαθητής Β έχει μικρότερο συντελεστή μεταβολής, άρα η βαθμολογία του είναι πιο ομοιογενής.

δ. i) Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Τιμές x_i	Συχνότητες ν_i	$\nu_i \cdot x_i$	Σχετικές Συχνότητες f_i
12	1	12	0,05
13	4	52	0,20
14	2	28	0,10
15	4	60	0,20
16	6	96	0,30
17	2	34	0,10
18	1	18	0,05
Αθροίσματα	ν = 20	300	1,00

ii) Το εύρος της βαθμολογίας όλων των μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας είναι $18-12=6$ και η μέση βαθμολογία είναι:

$$\overline{x}=\frac{12\cdot 1+13\cdot 4+14\cdot 2+15\cdot 4+16\cdot 6+17\cdot 2+18\cdot 1}{20}=\frac{300}{20}=15$$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $f(-1)=1 \Leftrightarrow \dfrac{(-1)^2+\mu(-1)-2}{-1-1}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\mu-2}{-2}=1 \Leftrightarrow -1-\mu=-2 \Leftrightarrow \mu=1$

β. i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\kappa x+\lambda)=\kappa+\lambda$

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(\kappa x+\lambda)=2\kappa+\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2}{2}+\lambda\right)=\dfrac{2^2}{2}+\lambda=2+\lambda$

iii) Πρέπει $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa+\lambda=3\\ 2\kappa+\lambda=2+\lambda\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\kappa+\lambda=3\\ \kappa=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\lambda=3\\ \kappa=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2\\ \kappa=1\end{cases}$

γ. Στο διάστημα $(-\infty\,,1)$ είναι:

$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$ οπότε $f'(x)=(x+2)'=1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $f'(x)=(x^2+1)'=2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$. Επομένως η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ με ελάχιστη τιμή $f(0)=0^2+1=1$.

β. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1+x\cdot ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)-1+x\cdot ln(x+1)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x\cdot ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(x+ln(x+1))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+ln(x+1))=0+ln1=0$

γ. Είναι $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x+c$ όπου $c\in\mathbb{R}$.

Όμως $3\cdot F(1)=7 \;\Leftrightarrow\; 3\dfrac{1^3}{3}+3\cdot 1+3\cdot c=7 \;\Leftrightarrow\; 3\cdot c=3 \;\Leftrightarrow\; c=1$.

Επομένως $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Είναι $g(x)=f'(x)\cdot e^x=2x\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$g'(x)=\left(2x\cdot e^x\right)'=(2x)'\cdot e^x+2x\cdot(e^x)'=2\cdot e^x+2x\cdot e^x$ και

$g''(x)=\left(2\cdot e^x+2x\cdot e^x\right)'=2\cdot(e^x)'+(2x)'\cdot e^x+2x\cdot(e^x)'=4\cdot e^x+2x\cdot e^x$.

Επομένως

$g''(x)+g(x)=2x\cdot e^x+4\cdot e^x+2x\cdot e^x=4\cdot e^x+4x\cdot e^x=$

$=2\cdot\left(2\cdot e^x+2x\cdot e^x\right)=2\cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $P(10)$

$$\begin{aligned} &=-10^3+15\cdot 10^2+600\cdot 10-300\\ &=-1.000+15\cdot 100+600\cdot 10-300\\ &=-1.000+1.500+6.000-300=6.200 \text{ χιλ.ευρώ.}\end{aligned}$$

β. Η παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P'(x)=(-x^3+15x^2+600x-300)'=-3x^2+30x+600.$$

Οπότε: $P'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -3x^2+30x+600=0$

$\Leftrightarrow\; x^2-10x-200=0$

$\Leftrightarrow\; x=-10$ (απορρίπτεται) ή $x=20$

Επίσης είναι:

$P'(x)>0$ για $x<20$ και $P'(x)<0$ για $x>20$.

Επομένως η συνάρτηση $P(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=20$, με μέγιστη τιμή

$P(20)=-20^3+15\cdot 20^2+600\cdot 20-300=-8.000+6.000+12.000-300=$

$=9.700$ χιλ.ευρώ.

γ. Η παράγωγος της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P'(x)=\left(-x^3+15x^2+600x-300\right)'=-3x^2+30x+600.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους για $x=10$ είναι:

$$P'(10)=-3\cdot 10^2+30\cdot 10+600=-300+300+600=600.$$

δ. Η παράγωγος του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης του κέρδους είναι:

$$P''(x) = \left(-3x^2 + 30x + 600\right)' = -6x + 30 .$$

και είναι:

$$P''(x) = 0 \iff -6x + 30 = 0 \iff x = 5$$

Επίσης είναι

$$P''(x) > 0 \text{ για } x < 5 \quad \text{και} \quad P''(x) < 0 \text{ για } x > 5 .$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής $P'(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$,

με μέγιστη τιμή $P'(5) = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 600 = -75 + 150 + 600 = 675$.