



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

- Β. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό
4. Λάθος 5. Λάθος 6. Σωστό

Θέμα 2^ο

$$\alpha) f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + a)e^{-x} = (2x - x^2 - a)e^{-x} = (-x^2 + 2x - a)e^{-x}$$

$$f(0) = a \text{ και } f'(0) = -a$$

$\varepsilon : y - a = -ax \Leftrightarrow y = -ax + a$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(0, f(0))$. Ταυτίζεται με την $y = -2x + 2$ όταν $-a = -2$ και $a = 2$ δηλαδή όταν $a = 2$.

β) Για $a = 2$ είναι $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ και $f'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $-x^2 + 2x - 2 < 0$ και $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 2)e^{-x}] \neq +\infty$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2) \cdot e^{-x}] \stackrel{(+\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

δ) Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(A) = (0, +\infty)$ το οποίο περιέχει το 2007. Η $f(x) \downarrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 3ο

$$\alpha) |z + w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 0 \stackrel{(1)}{=} z \cdot \overline{w} + \overline{z \cdot w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0$$

β) Ισχύει $z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 0 \Leftrightarrow$ (ερώτημα α)) $z \cdot \overline{w} = -\overline{z} \cdot w$. Διαιρούμε με $w \overline{w} = |w|^2$ και έχουμε $\frac{z}{w} = -\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ που σημαίνει ότι $\frac{z}{w}$ φανταστικός.

γ) Αν Α, Β οι εικόνες των z, w τότε $(OA) = |z|$, $(OB) = |w|$ και $(AB) = |z - w|$.

$$\text{Αρκεί ότι } (OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0 \text{ ισχύει.}$$

β' μέθοδος

Η ισότητα $|z + w| = |z - w|$ γράφεται ισοδύναμα $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{ Άρα } \angle AOB = 90^\circ$$

γ' μέθοδος

Αν Γ η 4η κορυφή του παραλληλόγραμμου με πλευρές OA και OB, τότε

$$(OG) = |z + w| \text{ και } (AB) = |z - w| \text{ επειδή } |z + w| = |z - w| \text{ είναι}$$

$$(OG) = (AB). \text{ Επομένως } OAGB \text{ ορθογώνιο.}$$

δ) Είναι

$$z \cdot \overline{w} = [a + i \cdot f(a)][f(\beta) + \beta i] = a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) + [a \cdot \beta + f(a)f(\beta)]i$$

$$\text{οπότε } \operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta}.$$

Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) η εξίσωση

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0. \text{ Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για}$$

$$\text{την } h(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ στο } [a, \beta], \text{ άρα υπάρχει } x_0 \in (a, \beta) \dots$$

Θέμα 4ο

α) $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και $g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$-$	
$g(x)$			

Σ. Κ.

β) Για $x = 0$ είναι $0 \leq g(0) \leq 0$. Ισχύει η ισότητα

Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιος ώστε } g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x} \text{ Έχουμε}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \leq g'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow g'(x) \leq g'(\xi) \leq g'(0). \text{ Ισχύει διότι } g'(x) \downarrow \text{ στο } [0, +\infty) \text{ και}$$

$$0 < \xi < x \text{ (ερώτημα α)}$$

β' μέθοδος

Θα αποδείξουμε ότι:

$$g(x) \geq \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \geq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{x}{1+x^2}, x \geq 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-1+x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } h \text{ συνεχής στο } [0, +\infty). \text{ Άρα}$$

$$h(x) \uparrow \text{ στο } [0, +\infty). \text{ Επομένως για κάθε } x \geq 0 \text{ ισχύει } h(x) \geq h(0) = 0.$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι: $g(x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

γ) Έστω $h(x) = g(x) + g(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt.$

$$\text{Είναι } h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \text{ άρα } h(x) = c$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } h(0) = 0. \text{ Επομένως } h(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β' μέθοδος

$$\text{Είναι } g(x) + g(-x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\text{Στο } g(-x) \text{ θέτουμε } t = -u \text{ τότε } dt = -du$$

Άκρα ολοκλήρωση

Για $t = 0, u = 0$ και για $t = 0, u = x$.

$$\text{Άρα } g(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = -\int_0^x \frac{1}{1+u^2} du$$

Επομένως ...

δ) Αφού $f(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$ τότε $g(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt > 0$. Άρα

$$E = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x' \cdot g(x) dx = \left[x \cdot g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x) dx =$$

$$= g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = g(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(1+x^2))' dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2 \text{ τ.μ.}$$