ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 186
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 33
Α4.
(α) Σωστό
(β) Σωστό
(γ) Λάθος
(δ) Σωστό
(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f παραγωγίσιμη στο $A_f = \mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 επομένως αντιστρέφεται.
Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$ άρα:

$$f(A_f) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-1, +\infty)$$

Διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x - 1\right) = 0 - 1 = -1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x - 1\right) = +\infty$$

Άρα

$$f(A_f) = (-1, +\infty)$$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f επομένως

$$f(A_f)=A_{f^{-1}}=(-1,+\infty)$$

Για τον τύπο της f^{-1} έχουμε

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^x-1=y \Leftrightarrow e^x=y+1 \Leftrightarrow x=\ln(y+1)$$

Άρα

$$f^{-1}(x)=\ln(x+1), x>-1$$

Β2. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Η f^{-1} παραγωγίσιμη στο $A_{f^{-1}}=(-1,+\infty)$ με $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x+1}$ και $(f^{-1})''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}<0$ για κάθε $x>-1$ άρα η f^{-1} κοίλη στο $A_{f^{-1}}=(-1,+\infty)$

Η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι ο άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $O(0,0)$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=1\cdot x \Leftrightarrow y=x$$

Εφόσον $f(0)=e^0=1$ και $f'(0)=e^0=1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f^{-1} στο $O(0,0)$ είναι:

$$y-f^{-1}(0)=(f^{-1})'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$$

Εφόσον $f^{-1}(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0$ και $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{0+1}=1$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στο $O(0,0)$ την ευθεία $y=x$

Β3. **(i)** Επειδή η f κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο βρίσκεται **<<πάνω>>** από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Οπότε: $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$

όμως η f^{-1} είναι κοίλη στο $(-1,+\infty)$ άρα η η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο βρίσκεται **<<κάτω >>** από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Οπότε: $f^{-1}(x)\leq x$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$

Οπότε για κάθε $x\in A_f\cap A_{f^{-1}}=(-1,+\infty)$ ισχύει: $f(x)\geq f^{-1}(x)$

(ii) Η εξίσωση για κάθε $x>0$ γράφεται:

$$f(x)+f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x)+\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)+x=f^{-1}(x)+\eta\mu x \ (1)$$

Δείξαμε στο **Β3(i)** ότι $f(x) \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x \geq -1$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(x) > f^{-1}(x) \; (2)$$

Επίσης: $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \neq 0$ άρα για $x>0$ γίνεται:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$$

$$\text{Άρα } x > \eta\mu x \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις $(2),(3)$ παίρνουμε:

$$f(x) + x > f^{-1}(x) + \eta\mu x \text{ για κάθε } x>0$$

Επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$

Β4. Εφόσον η G μια παράγουσα της g στο διάστημα $\Delta = (0,+\infty)$ τότε ισχύει:

$$G'(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Η G ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[\alpha,\beta]$ επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\beta)-G(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (4)$$

Επομένως: $G'(x) = g(x) \Leftrightarrow G'(x) = f(x) + f^{-1}(x) \Leftrightarrow G'(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$

Η G' παραγωγίσιμη στο $\Delta = (0,+\infty)$ με:

$G''(x) = e^x + \dfrac{1}{x+1} > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ δηλαδή η G' γνησίως αύξουσα στο Δ

Επομένως:

$$\alpha < \xi < \beta \overset{G'\uparrow}{\Rightarrow} G'(\alpha) < G'(\xi) < G'(\beta) \overset{(4)}{\Rightarrow} g(\alpha) < \frac{G(\beta)-G(\alpha)}{\beta-\alpha} < g(\beta)$$

$$\Rightarrow g(\alpha)(\beta-\alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < g(\beta)(\beta-\alpha)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η f σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό τότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow k-\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow k=1$$

Για $k=1$

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}$$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε

$$f(x)=x+\frac{2}{x}-\ln x+c$$

Όμως

$$f(2)=1-\ln 2 \Leftrightarrow 2+1-\ln 2+c=1-\ln 2 \Leftrightarrow c=-2$$

Επομένως $f(x)=x+\frac{2}{x}-\ln x-2$

Γ2. Η εξίσωση $x^2+2=x(\alpha+\ln x+2)$ για $x>0$ γίνεται

$$x+\frac{2}{x}=\alpha+\ln x+2 \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}-\ln x-2=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f

$$f'(x)=1-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}=0 \underset{x+1>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}>0 \underset{x+1>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}<0 \underset{x+1>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Στο διάστημα $(0,2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο διάστημα $[2,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
Για x = 2 παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή $f(2)=1-\ln 2$
Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,2]$
άρα

$$f(A_1)=\left[f(2),\lim_{x\to0^+} f(x)\right)=[1-\ln 2,+\infty)$$

διότι:

- $$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{2}{x}-\ln x-2\right)=+\infty$$

εφόσον $\lim_{x\to0^+}(x-2)=-2$, $\lim_{x\to0^+}\frac{2}{x}=0$ $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$
Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[2+\infty)$ άρα

$$f(A_2)=\left[f(2),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=[1-\ln 2,+\infty)$$

διότι:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{x}-\ln x-2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}\right)\right]=(+\infty)\cdot1=+\infty$$

εφόσον $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=1$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Επομένως

$$f(A)=[1-\ln 2,+\infty)$$

Για την εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχουμε:

- Αν $\alpha<1-\ln 2$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη εφόσον $\alpha\notin f(A)$
- Αν $\alpha>1-\ln 2$ τότε:

$\alpha\in f(A_1)$ οπότε υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=\alpha$ το x_1 μοναδικό διότι η f γνησίως φθίνουσα στο A_1 και $\alpha\in f(A_2)$ οπότε υπάρχει $x_2\in(2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=\alpha$ το x_2 μοναδικό διότι η f γνησίως αύξουσα στο A_2
Επομένως η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δύο ακριβώς ρίζες

- Αν $\alpha=1-\ln 2$ τότε η εξίσωση $f(x)=1-\ln 2$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$ διότι στο $x_0=2$ η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ3.

(i) $f''(x)=\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ επομένως η f κυρτή στο πεδίο ορισμού της.
Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(1,f(1))$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+3$$

(ii) Η δοσμένη ανίσωση για $x>0$ γίνεται:

$$e^{3x^2-5x+2}>x^x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln\left(e^{3x^2-5x+2}\right)>\ln x^x\Leftrightarrow 3x^2-5x+2>x\ln x\Leftrightarrow 3x-5+\frac{2}{x}>\ln x$$

$$\Leftrightarrow 2x+x-2-3+\frac{2}{x}>\ln x\Leftrightarrow x-2+\frac{2}{x}-\ln x>-2x+3\Leftrightarrow f(x)>-2x+3$$

Εφόσον η f κυρτή στο $A=(0,+\infty)$ η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο του Α βρίσκεται << κάτω>> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή ισχύει $f(x)\geq -2x+3$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1 επομένως:
Η ανίσωση $f(x)>-2x+3$ αληθεύει για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Γ4. Ο τύπος της συνάρτησης g είναι:

$$g(x)=f(x)+\ln x+2\Leftrightarrow g(x)=x+\frac{2}{x}-\ln x-2+\ln x+2\Leftrightarrow g(x)=x+\frac{2}{x},x>0$$

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=1$$

και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Οπότε η y = x είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^e|g(x)-x|dx=\int_1^e\left|\frac{2}{x}\right|dx\overset{x>0}{=}\int_1^e\frac{2}{x}dx=\left[2\ln x\right]_1^e=2\ln e-2\ln 1=2\tau.\mu$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας τη σχέση: $f\left(f^2(x)\right)+f^2(x)=f(x)+x$ έχουμε:

$$f'\left(f^2(x)\right)\cdot 2f(x)f'(x)+2f(x)f'(x)=f'(x)+1$$

$$\Leftrightarrow f'\left(f^2(x)\right)\cdot 2f(x)f'(x)+2f(x)f'(x)-f'(x)=1$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(f'\left(f^2(x)\right)\cdot 2f(x)+2f(x)-1\right)=1 \ \mathbf{(1)}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και επειδή η f' είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$

Για $x=1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f'(1)\left(f'\left(f^2(1)\right)\cdot 2f(1)+2f(1)-1\right)=1\Leftrightarrow f'(1)\left(2f'(1)+1\right)=1\Leftrightarrow 2\left(f'(1)\right)^2+f'(1)-1=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις το -1 και το $\frac{1}{2}$, όμως $f'(1)\neq -1$ άρα $f'(1)=\frac{1}{2}$

Η f' διατηρεί πρόσημο στο $A=(0,+\infty)$ και $f'(1)=\frac{1}{2}>0$

Άρα: $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Για το ολοκλήρωμα $\int_2^3 f(t-1)dx$ θέτουμε $u=t-1$ οπότε $du=dt$ και για $t=2$ έχουμε $u=1$ ενώ για $t=3$ έχουμε $u=1$ άρα: $\int_2^3 f(t-1)dx=\int_1^2 f(u)du$ άρα η g γίνεται:

$$g(x)=\begin{cases}\left(\int_1^2 f(t)dt\right)\cdot x^3, x\geq 0\\[2ex] \left(\int_1^2 f(t)dt\right)\cdot x^2, x<0\end{cases}$$

και θέτοντας για λόγους απλότητας $\int_1^2 f(t)dt=k$ γίνεται:

$$g(x)=\begin{cases}k\cdot x^3, x\geq 0\\[2ex] k\cdot x^2, x<0\end{cases}$$

- $g(-1)=k\cdot(-1)^2=k$

- $g(1)=k\cdot 1^3=k$

Οπότε: $g(-1)=g(1)$

Η g παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $g'(x)=2kx$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=3kx^2$.

Για το $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}kx=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{kx^3}{x}=\lim_{x\to 0^+}kx^2=0$$

Άρα η g παραγωγίσιμη και στο μηδέν με $g'(0)=0$ επομένως θα είναι και συνεχής στο $x_0=0$

Επομένως για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ εφόσον είναι συνεχής στο $[-1,1]$ παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $g(-1)=g(1)$

Δ3. Η συνάρτηση $h(x)=f(x^2+1), x>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$ διότι:

$$h'(x)=f'(x^2+1)\cdot 2x>0, \text{για κάθε } x>0$$

Α-τρόπος

Για το ολοκλήρωμα $\int_1^2 h(x)dx$ θέτουμε $x=u-1$ οπότε $du=dx$ και για $x=1$ έχουμε $u=2$ ενώ για $x=2$ έχουμε $u=3$ άρα: $\int_1^2 h(x)dx=\int_2^3 h(u-1)du$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι: $\int_2^3 h(x)dx>\int_2^3 h(x-1)dx$

Για κάθε $x>0$ ισχύει: $x-1<x \overset{h''}{\Rightarrow} h(x-1)<h(x)\Rightarrow \int_2^3 h(x-1)dx<\int_2^3 h(x)dx$

Β-τρόπος

Αν F παράγουσα της $h(x)=f(x^2+1)$ τότε η (2) γίνεται

$$\int_2^3 h(x)dx>\int_1^2 h(x)dx \Leftrightarrow F(3)-F(2)>F(2)-F(1)$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ στα $[1,2]$, $[2,3]$

υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$, $x_2 \in (2,3)$ ώστε

$$F'(x_1) = \frac{F(2)-F(1)}{2-1} \Leftrightarrow F'(x_1) = F(2)-F(1)$$

$$F'(x_2) = \frac{F(3)-F(2)}{3-2} \Leftrightarrow F'(x_2) = F(3)-F(2)$$

$$x_1 < x_2 \overset{F'=h!}{\Rightarrow} F'(x_1) < F'(x_2) \Leftrightarrow F(2)-F(1) < F(3)-F(2)$$

Δ4. Η εξίσωση

$$\left(\int_2^3 \left(h(t)\cdot \int_2^3 h(u)du \right) dt\right)\cdot(x-2) + f(x)\left(\int_1^2 h(t)dt\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 h(u)du \cdot \int_2^3 h(t)dt \cdot (x-2) + f(x)\left(\int_1^2 h(t)dt\right)^2 = 0$$

Θέτουμε: $\int_2^3 h(t)dt = \int_2^3 h(u)du = \alpha$ και $\int_1^2 h(t)dt = \beta$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha^2(x-2) + f(x)\cdot\beta^2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \alpha^2(x-2) + f(x)\cdot\beta^2, x \in [1,2]$$

Η φ συνεχής στο [1, 2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\varphi(1) = \alpha^2(1-2) + f(1)\cdot\beta^2 \Leftrightarrow g(1) = -\alpha^2 + \beta^2 = (\beta-\alpha)\cdot(\beta+\alpha) < 0$$

Διότι: από το **Δ3** ισχύει $\beta < \alpha \Leftrightarrow \int_1^2 h(t)dt < \int_2^3 h(t)dt$ και λόγω μονοτονίας $h(x) \geq h(1) > 0$ άρα $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\varphi(2) = \alpha^2(2-2) + f(2)\cdot\beta^2 \Leftrightarrow g(2) = f(2)\cdot\beta^2 > 0$$

Διότι: $2 > 1 \overset{f''}{\Rightarrow} f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) > 1$ και $\beta^2 = \left(\int_1^2 h(t)dt\right)^2 > 0$

Επομένως $\varphi(1)\cdot\varphi(2) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

Η φ παραγωγίσιμη στο $A_\varphi = (0,+\infty)$ με $\varphi'(x) = \alpha^2 + \beta^2 f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ επομένως η φ γνησίως αύξουσα στο $A_\varphi = (0,+\infty)$ οπότε η ρίζα είναι μοναδική.