Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Γ. 1 – **(Λάθος)** – 2 **(Σωστό)** – 3 **(Λάθος)** 4 **(Λάθος)** διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0$ διότι α<β και $f(\alpha) < f(\beta)$

5 (Λάθος) διότι: αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$

Θέμα 2ο

α) Για κάθε $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\ln x - 2) + 2\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2) + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x - 2 + 2) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

β) $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\right] = -\infty$ διότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

γ) Για κάθε χ>0, $f''(x) = \dfrac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Είναι $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

x	0	e^2	$+\infty$
f΄΄(x)	+		-
F(x)	κυρτή	Σ.Κ	κοίλη

$$f\left(e^2\right)=2e\left(\ln e^2-2\right)=0$$

$M\left(e^2,0\right)$ το σημείο καμπής

δ) $$E=\int_{1/e}^{e^2}\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|dx=\int_{1/e}^{1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\left[-2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)\right]_{1/e}^{1}+\left[2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)\right]_{1}^{e^2}=$$

$$=-2(-2)+\frac{2}{\sqrt{e}}\left(\ln\frac{1}{e}-2\right)+2e\cdot\left(\ln e^2-2\right)-2(-2)$$

$$=8+\frac{2}{\sqrt{e}}(-1-2)+2e(2-2)=8-\frac{6}{\sqrt{e}}\text{ τ.μ.}$$

Θέμα 3ο

α) $\operatorname{Re}(z)>\operatorname{Im}(z)\Leftrightarrow e^x>x-1\Leftrightarrow e^x-x+1>0$

Έστω $f(x)=e^x-x+1,\ x\in\mathbf{R}$. Τότε $f'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	–		+
F(x)	↘	2	↗

Η f για χ=0 παρουσιάζει ελάχιστο το 2. Άρα $f(x)\geq f(0)=2>0$ δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

β) $$w=\left[e^x+(x-1)i\right]^2+e^x+(x-1)i+2i=$$

$$=e^{2x}+2i(x-1)\cdot e^x-(x-1)^2+e^x+(x-1)i+2i=$$

$$=e^{2x}+e^x-(x-1)^2+i\left[2(x-1)e^x+x+1\right]$$

Έστω $g(x)=2(x-1)e^x+x+1,\ x\in[0,1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $g(0)=-2+1=-1$, $g(1)=1+1=2$ Άρα $g(0)\cdot g(1)<0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε 0 W να είναι πραγματικός.

γ) $\left|z\right| = \sqrt{e^{2x} + \left(x-1\right)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση

$h\left(x\right) = e^{2x} + \left(x-1\right)^2$ έχει ελάχιστο.

$h'\left(x\right) = 2e^{2x} + 2\left(x-1\right)$. Προφανής λύση είναι η χ=0 διότι

$h'\left(0\right) = 2 - 2 = 0$. Είναι $h''\left(x\right) = 4e^{2x} + 2 > 0$. Άρα η $h'\left(x\right) \uparrow$.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
h΄(x)	− +
H(x)	$\searrow$ min $\nearrow$

Για κάθε χ<0 ισχύει $h'\left(x\right) < h'\left(0\right) = 0$ και για κάθε χ>0

ισχύει $h'\left(x\right) > h'\left(0\right) = 0$. Επομένως η $h\left(x\right)$ έχει ελάχιστο στο χ=0.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z = e^0 + \left(0-1\right)i = 1 - i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

Θέμα 4ο

α) $e^x \cdot f\left(x\right) + e^x \cdot f'\left(x\right) + f'\left(x\right) = -\eta\mu x$

$$\left[e^x \cdot f\left(x\right) + f\left(x\right)\right]' = \left(\sigma\upsilon\nu x\right)'$$

Άρα υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε:

$$e^x \cdot f\left(x\right) + f\left(x\right) = \sigma\upsilon\nu x + c,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\left(e^x + 1\right) \cdot f\left(x\right) = \sigma\upsilon\nu x + c.$$

Για χ=0 είναι $2f\left(0\right) = \sigma\upsilon\nu 0 + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως $f\left(x\right) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x},\ x \in \mathbf{R}$

Έχουμε $f\left(x\right) + f\left(-x\right) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{-x}} = \ldots = \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$

β) $-\dfrac{1}{1+e^x} \le \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x} \le \dfrac{1}{1+e^x},\ x \in \mathbf{R}$ διότι $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = 0$$

γ) Με ολοκλήρωση των μελών της (1) παίρνουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(x\right)dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(-x\right)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx \ \mathbf{(2)}$$

Στο $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)\,dx$ θέτουμε $x=-u$ οπότε $dx=-du$.

Για $x=-\pi/2$ είναι $u=\pi/2$ και για $x=\pi/2$ είναι $u=-\pi/2$

Άρα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(-x)\,du=-\int_{\pi/2}^{-\pi/2} f(u)\,du=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(u)\,du$.

Η (2) γράφεται:

$$I+I=\left[\eta\mu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\Leftrightarrow 2\mathrm{I}=\eta\mu\pi/2-\eta\mu(-\pi/2)=1+1=2$$

Επομένως Ι= 1.

δ) Βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της f στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=\frac{-\eta\mu x\cdot(1+e^x)-\sigma\upsilon\nu x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=-\frac{\eta\mu x\cdot(1+e^x)+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(1+e^x)^2}<0$$

για κάθε $x\in[0,\pi/2]$. Άρα $f\downarrow$ στο $[0,\pi/2]$ οπότε $f(0)=\dfrac{1}{2}$ η μέγιστη τιμή και $f(\pi/2)=0$ η ελάχιστη.

Ισχύει $0\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$ απ' όπου προκύπτει ότι $0\le\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx\le\dfrac{\pi}{4}$.