



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 9**

**B.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^a$  με  $a \in \mathbb{R}$  και  $x > 0$ .

Να αποδείξετε ότι:  $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ.** Να απαντήσετε αν είναι **Σωστή** ή **Λάθος** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\langle 1-1 \rangle$  αν και μόνο αν για κάθε

$x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 = x_2$  τότε  $f(x_1) = f(x_2)$

2. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  τότε  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ .

3. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$

τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ , τότε  $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ .

4. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  και γνησίως αύξουσα, τότε

υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) < 0$ .

5. Αν  $\int_a^\beta f(x) dx = 0$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού ίση με μηδέν στο

$[a, \beta]$ , τότε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

**Μονάδες 10**

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2)$ ,  $x > 0$

**α)** Να αποδείξετε ότι:  $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$ .

**Μονάδες 4**

**β)** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ .

**Μονάδες 3**

γ) Να μελετήσετε τα κοίλα της  $f$  και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

**Μονάδες 8**

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \frac{1}{e}$

και  $x = e^2$ .

**Μονάδες 10****Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο μιγαδικός  $z = e^x + (x - 1)i$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Im}(z)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ..

**Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιος ώστε ο αριθμός

$w = z^2 + z + 2i$  να είναι πραγματικός.

**Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το μιγαδικό  $z$  του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

**Μονάδες 9****Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f(0) = \frac{1}{2}$

και  $e^x [f(x) + f'(x)] + \eta\mu x = -f'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  .

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και ότι ισχύει

$f(x) + f(-x) = \sigma\upsilon\nu x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ..

**Μονάδες 7**

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Μονάδες 6**

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$ .

**Μονάδες 6**

δ) Να αποδείξετε ότι:  $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 6**