

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ



Θέμα 1

A. α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 11

β) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παραστάσης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\llcorner 1 - 1 \gg$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $f(x) \neq 0$ για τις τιμές του x κοντά στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή σε κανένα σημείο του Δ , τότε $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

ε) Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ και $a < \beta$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

Μονάδες 10

Θέμα 2

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{z+i}{1+iz}$ όπου $z \neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{w-i}{w+i} \right| = |z|$

Μονάδες 5

β) Αν $|z|=1$ και M η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε την ισοδυναμία: w φανταστικός $\Leftrightarrow z$ φανταστικός.

Μονάδες 7

δ) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a, \beta]$ με $f(a) > 1$ και έστω $z = f(a) \cdot i$ και $w = f(\beta) \cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Μονάδες 7**Θέμα 3**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax - 1$ όπου $a > 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Μονάδες 8

γ) Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x = a > 1$.

i) Να αποδείξετε ότι: $E(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$.

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

Μονάδες 6

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} με $f(x) > 0$ και έστω

$$g(x) = \int_0^1 t \cdot f(xt) dt, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t \cdot f(t) dt$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

β) Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

γ) $x \cdot g(x) < \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

δ) Αν $\int_1^2 t \cdot f(t) dt = 3 \int_0^1 t \cdot f(t) dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε: $2g(\xi) = f(\xi)$.

Μονάδες 6