Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολ. Βιβλίο σελ. 260

Β. **1.** Σχολ. Βιβλίο σελ. 280
2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 191

Γ. **1.** Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. $z+\frac{1}{z}=-1 \Leftrightarrow z^2+1=-z \Leftrightarrow z^2+z+1=0$ με $z_1 z_2=1$ (τύποι Vieta)

$\left(ή\ \Delta=1^2\text{-}4.1.1=\text{-}3\quad z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ και } z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$z_1^2+z_1+1=0 \Rightarrow z_1^3+z_1^2+z_1=0 \Leftrightarrow z_1^3=-\left(z_1^2+z_1\right)=1$ ή $z_1^3=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dots$

Β. Οι αριθμοί z_1 και z_2 συζυγείς οπότε $\overline{z_1^{2009}}=\overline{z_1}^{2009}=z_2^{2009}$
Άρα $\left(z_1^{2009}+z_2^{2009}\right)\in\Re$ σαν άθροισμα συζυγών

Γ. $z_1^8+\frac{1}{z_2^{10}}+1=z_1^8+z_1^{10}+1=\left(z_1^3\right)^2.z_1^2+\left(z_1^3\right)^3 z_1+1=z_1^2+z_1+1=0$

Δ. Έστω $g(x)=f(x)-3x+2$, συνεχής στο $[0,1]$ σαν άθροισμα συνεχών (f παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής και –3x+2 συνεχής ως πολυωνυμική με

$$g(0)=f(0)+2=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+2+2=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1 z_2}+4=\frac{\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1 z_2}{z_1 z_2}+4=\frac{(-1)^2-2.1}{1}+4=3>0$$

και $g(1)=f(1)-3+2=\frac{1}{2z_1}+\frac{1}{2z_2}-\frac{3}{2}-1=\frac{2z_2+2z_1}{4z_1 z_2}-\frac{5}{2}=\frac{-2}{4}-\frac{5}{2}=-3<0$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-3x_0+2=0 \Leftrightarrow f(x_0)=3x_0-2$$

Ε. w = 2(z_1+z_2)=2(-1)=-2 δηλαδή Γ (-2,0), και $A\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ τότε

$$|\Gamma A| = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|\Gamma B| = \sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Άρα $|\Gamma A| = |\Gamma B|$

ΘΕΜΑ3ο

Α. $f(x)=x+2+2\ln x$ **με** π.ο. $D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}>0 \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$$

$$f''(x)=\frac{-2}{x_2}<0 \Rightarrow f \text{ κοίλη στο } (0,+\infty)$$

Β. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x>0^+}(x+2+2\ln x)=0+2-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2+2\ln x)=+\infty+2+\infty=+\infty$ δηλαδή f(A)=$(-\infty,+\infty)$

Αφού το $0\in f(A)$ έχει η f(x)=0 ρίζα x_0 στο $(0,+\infty)$, μοναδική γιατί $f\uparrow(0,+\infty)$

Γ. Θέλω g(x)≥g(x_0) δηλαδή η g να έχει ελάχιστο στο x_0. Έχω

$$g'(x)=\frac{(\ln x+1)(x+2)-x\ln x}{(x+2)^2}=\frac{x\ln x+2\ln x+x+2-x\ln x}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2\ln x+x+2}{(x+2)^2}=\frac{f(x)}{(x+2)^2}$$

Αν $g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

x		x_0	
g'(x)	−	0	+
g(x)	↘	ελ	↗

άρα η g(x) έχει ελάχιστο στο x_0 δηλαδή $g(x) \geq g(x_0)$

Δ. Θέλω $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4) \Leftrightarrow f(x+4)-f(x+1)<f(x+1)-f(x-2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+4)-f(x+1)}{(x+4)-(x+1)} < \frac{f(x+1)-f(x-2)}{(x+1)-(x-2)}$$

έχω από Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχουν ξ_1 , $\in (x+1, x+4)$ και $\xi_2 \in (x-2, x+1)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+4)-f(x+1)}{(x+4)-(x+1)} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x+1)-f(x-2)}{(x+1)-(x-2)} \text{ δηλαδή θέλω}$$

$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

Όμως f κοίλη στο $(0,+\infty)$ δηλαδή $f' \downarrow (0,+\infty)$ και $0< x-2 < \xi_2<x+1<\xi_1<x+4$

Θα είναι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \left(e^{-x}\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\frac{1}{x} + c$$

Για x = 1 είναι $f(1) = \frac{1}{e} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\frac{1}{x}$

Έστω $\frac{1}{x} = \omega$ τότε $x = \frac{1}{\omega}$, $\omega \in (0, +\infty)$. Άρα $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$

Τελικά $f(x) = xe^{-1/x}$ $x \in (0, +\infty)$.

2η λύση:

$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}$, x>0

Θέτω $\frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x = \frac{1}{\omega} > 0$

Άρα $f'(\omega) = \left(\frac{1}{\omega}+1\right) e^{-1/\omega} \Rightarrow f'(\omega) = (\omega e^{-1/\omega})' \Rightarrow f(\omega) = \omega e^{-1/\omega} + c$

Για x = 1 είναι ω = 1 άρα $f(1) = e^{-1} + c \Rightarrow c = 0$

Άρα $f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$, ω>0 ή $f(x) = x e^{-1/x}$, x>0

Β.

1. Είναι $f'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x}\ \frac{1}{x^2} = e^{-1/x}\ (1 + \frac{1}{x})$

$f'(1) = \frac{2}{e}$, $f(1) = \frac{1}{e}$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e}$ (ε)

2. Είναι: $f''(x) = \frac{1}{x^3}\ e^{-1/x} > 0$ για $x > 0$.

Άρα η f(x) είναι κυρτή στο $\in (0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός του σημείου επαφής.

Είναι $f(x) \geq \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e} \geq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$

Άρα $\int_1^2 (f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e})dx > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 (-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e})dx > 0 \Rightarrow$

$\int_1^2 f(x)dx + [-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}]_1^2 > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx - \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$

Γ. $g(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{e^{-1/x}}{x^2} > 0$ στο $[1,t]$

Άρα $E = \int_1^t g(x)dx = \int_1^t \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\ dx = [e^{-1/x}]_1^t = e^{-1/t} - e^{-1}$ τ.μ.

Δ. $\lim_{t\to+\infty} E(t) = \lim_{t\to+\infty}(e^{-\frac{1}{t}} - e^{-1}) = \lim_{\omega\to 0}(e^{\omega} - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$

(Έστω $-\frac{1}{t} = \omega$, όταν $t \to +\infty$ τότε $\omega \to 0$)