



# Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1

**A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν:

- η  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

**B.** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**Γ.** Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**Δ.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  είναι  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

2. Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

3. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ορίζεται η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$ , τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή  $A \cap B$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

4. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

5.  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx$ , όπου  $f', g'$  είναι συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x) = 4x^3 + 12\lambda x^2 + (\lambda - 1)x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία παρουσιάζει στο σημείο  $x_0 = -1$  καμπή.

α. i. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

β. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

γ. i. Να βρείτε την αρχική της  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(0, 1)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4****ΘΕΜΑ 3**

Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i.  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$  και  $f(0) + f(1) = 1$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

ii. Υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$  τέτοιο, ώστε:  $f(x_0) + x_0 = 1$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

β. Έστω, επιπλέον, ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και  $f(x) \geq \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να βρείτε την  $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της με τετμημένη  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

ii. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**ΘΕΜΑ 4**

- A.** Να αποδείξετε ότι  $e^x - x \geq 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Πότε ισχύει η ισότητα  $e^x - x = 1$ ;

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

- B.** Έστω μια συνεχής συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ . Για κάθε  $x \geq 0$  θεωρούμε το μιγαδικό  $z$ , με:

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + ix \int_0^1 e^{f(x-t)} dt \quad \text{και} \quad \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x [f(t) + e^t] dt + f(a) - 1,$$

όπου  $a > 0$ .

Να αποδείξετε ότι:

**α. i.**  $\frac{z}{1+i} = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \geq 0$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ii.**  $e^{f(x)} = f(x) + e^x$ , για κάθε  $x \geq 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

- β.** Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

- γ.** Η  $f$  έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

- δ.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $\xi \in (0, a)$  τέτοιο, ώστε  $a f'(\xi) = 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**