Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο Θέμα

Α. i) Σχολ. βιβλίο σελ. 16

ii) Σχολ. βιβλίο σελ. 13

Β. Σχολικό βιβλίο σελ. 65

Γ. 1 (Λ), 2 (Σ), αφού για i=5, είναι $N_5 = \nu \Leftrightarrow \nu = 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 110$

3 (Λ), 4 (Σ), 5 (Λ)

2ο Θέμα

α) Για $x \neq 4$ είναι:

$$F(x) = \frac{(\bar{t} - 2s)(x-4)}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\bar{t} - 2s)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\bar{t} - 2s)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{(\bar{t} - 2s)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x}+2)$$

β) Η F είναι συνεχής, οπότε

$$\lim_{x \to 4} F(x) = F(4) \overset{\text{α. ερωτ.}}{\underset{\text{κ΄ υποθ.}}{\Leftrightarrow}} \lim_{x \to 4} (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x}+2) = -24 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t} - 2s)(\sqrt{4}+2) = -24 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} - 2s = -6 \cdot s$$

$$\Leftrightarrow \bar{t} = -4 \cdot s \qquad (\text{ είναι } s > 0, \text{ άρα } \bar{t} < 0 \text{ })$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{-\bar{t}} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{t}|} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow CV = 0{,}25 = 25\%.$$

Επομένως, το δείγμα των τιμών $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ της μεταβλητής T δεν είναι ομοιογενές.

γ) Η g ορίζεται στο $[0,+\infty)$ αφού $\overline{t}-2s \overset{\text{β.ερωτ.}}{=} -4\cdot s-2\cdot s=-6\cdot s\neq 0$ (από υπόθεση)

Για χ≠4 είναι

$$g(x)=\frac{F(x)}{\overline{t}-2s}\overset{\text{α.ερωτ.}}{=}\frac{(\overline{t}-2s)(\sqrt{x}+2)}{\overline{t}-2s}=\sqrt{x}+2$$

και

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

οπότε έχουμε

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1 \ \ (1).$$

Η εφαπτομένη (ε): $y=\lambda x+\beta$ στο Α έχει $\lambda=g'\left(\frac{1}{4}\right)$, έτσι γίνεται:

$$y=g'\left(\frac{1}{4}\right)x+\beta \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y=x+\beta.$$

Επειδή το $A\left(\frac{1}{4},g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ ανήκει στην (ε): y=x+β, είναι $\frac{5}{2}=\frac{1}{4}+\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{9}{4}$,

επομένως

$$(\varepsilon):\ y=x+\frac{9}{4}$$

3ο Θέμα

α) Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. είναι

$$\frac{100}{4.000}\cdot 100\%=2,5\%.$$

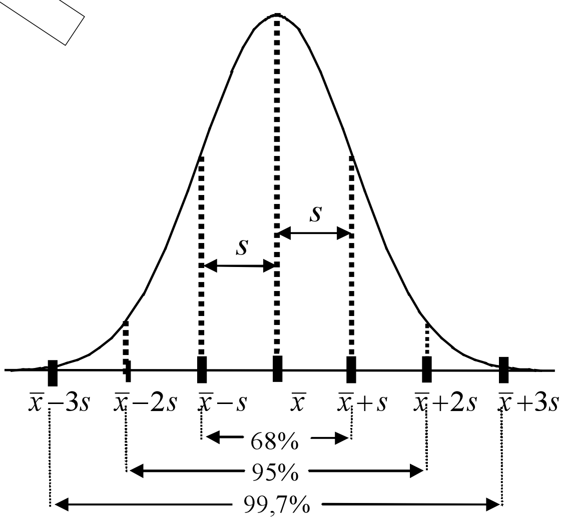
Όμως $2,5\%=\frac{100\%-95\%}{2}$ είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $\overline{x}-2s$.

Άρα

$$\overline{x}-2s=1.400 \ \ (1)$$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ. είναι

$$\frac{3.360}{4.000}\cdot 100\%=84\%.$$



Όμως $84\% = 100\% - \frac{100\% - 68\%}{2}$ είναι το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $\overline{x} + s$.

Άρα

$$\overline{x} + s = 2000 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) δίνουν το σύστημα

$$\begin{cases} \overline{x} - 2s = 1400 \\ \overline{x} + s = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 200 \\ \overline{x} = 1800 \end{cases}.$$

Ώστε: $\overline{x} = 1.800$κ.εκ., $s = 200$κ.εκ. και, τέλος, $R \cong 6 \cdot s = 1.200$κ.εκ..

β) Έστω τα ενδεχόμενα:

Α: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ.

Β: το αυτοκίνητο έχει κινητήρα με κυβισμό μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Ζητάμε την πιθανότητα $P(A \cup B)$

Το ποσοστό των αυτοκινήτων με κυβισμό μικρότερο από $1200\text{κ.εκ.} = \overline{x} - 3s$ είναι $\frac{100\% - 99,7\%}{2} = 0,15\%$ ενώ αυτό των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο από $2000\text{κ.εκ.} = \overline{x} + s$ είναι $\frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%$. Επομένως

$$P(A)=0,15\% \quad \text{και} \quad P(B)=16\%$$

Επειδή, προφανώς, τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,15\% + 16\% = 16,15\%$$

γ) Έστω y_i, i=1,2,3,…,4000, ο κυβισμός των κινητήρων μετά την επισκευή.

Είναι $y_i = x_i + 0,06x_i = 1,06\ x_i$, i=1,2,3,…,4000, οπότε (βλέπε εφαρμογή 3 σελίδα 99 σχολικού βιβλίου)

$$\overline{y} = 1,06\overline{x} = 1,06 \cdot 1800 = 1908\text{κ.εκ}$$

και

$$s_y = 1,06 s_x = 1,06 \cdot 200 = 212\text{κ.εκ.}$$

άρα

$$s_y^2 = 212^2 = 44944\ (\text{κ.εκ})^2.$$

Το εύρος των νέων τιμών βρίσκεται ως εξής: Αν μ_x, M_x είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη αντίστοιχα από τις τιμές x_i, i=1,2,3,…,4000, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\mu_x \le x_i \le M_x$$

$$1,06\ \mu_x \le 1,06x_i \le 1,06M_x$$

$$1,06\ \mu_x \le y_i \le 1,06M_x \quad \text{για κάθε } i=1,2,3,\dots,4000$$

Έτσι, η μικρότερη μ_y και η μεγαλύτερη M_y από τις τιμές y_i, $i=1,2,3,\dots,4000$, είναι

$$\mu_y = 1{,}06\ \mu_x$$
$$M_y = 1{,}06 M_x$$

και το εύρος R_y είναι:

$$R_y = M_y - \mu_y = 1{,}06M_x - 1{,}06\mu_x = 1{,}06(M_x - \mu_x) = 1{,}06R \cong 1{,}06 \cdot 1200 = 1272 \text{ κ.εκ.}$$

4ο Θέμα

α) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με

$$f'(x) = -\left[x - P(\Lambda)\right] + P(K) = P(\Lambda) + P(K) - x.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x = 0 \Leftrightarrow x = P(\Lambda) + P(K).$$

Ακόμα:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x > 0 \Leftrightarrow x < P(\Lambda) + P(K) \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow P(\Lambda) + P(K) - x < 0 \Leftrightarrow x > P(\Lambda) + P(K)$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, P(\Lambda)+P(K)]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[P(\Lambda)+P(K), +\infty)$, και παρουσιάζει μέγιστο στο $x=x_o$ με $x_o=P(\Lambda)+P(K)$.

i) Για την μέγιστη τιμή έχουμε:

$$f(x_0) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow f\big(P(K)+P(\Lambda)\big) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left[P(K)+P(\Lambda)-P(\Lambda)\right]^2 + \left[P(K)+P(\Lambda)\right]P(K) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left[P(K)\right]^2 + \left[P(K)\right]^2 + P(K)P(\Lambda) = \frac{5}{2}\left[P(K)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$P(K)P(\Lambda) = 2\left[P(K)\right]^2 \overset{P(K)\neq 0}{\Leftrightarrow} P(\Lambda) = 2P(K)$$

β) i) Ισχύουν:

$$\varnothing \subseteq K \cap \Lambda \subseteq K \quad \text{και} \quad \Lambda \subseteq K \cup \Lambda \subseteq \Omega$$

επομένως

$$P(\varnothing) \le P(K\cap\Lambda) \le P(K) \quad \text{και} \quad P(\Lambda) \le P(K\cup\Lambda) \le P(\Omega).$$

Ακόμα

$$P(K) < P(\Lambda) \qquad \text{(από ερώτημα (α) (ii))}$$

Επομένως, αν διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις, έχουμε:

$$P(\varnothing),\ P(\varnothing),\ P(K\cap\Lambda),\ P(K),\ P(K),\ P(K),\ P(\Lambda),\ P(K\cup\Lambda),\ P(K\cup\Lambda),\ P(\Omega).$$

Η διάμεσος αυτών των 10 παρατηρήσεων είναι το ημιάθροισμα της $5^{ης}$ και $6^{ης}$ παρατήρησης: $\delta = \dfrac{P(K)+P(K)}{2} = P(K)$

Έτσι

$$P(K) = \delta = \frac{1}{4}$$

Ακόμα

$$P(\Lambda) = 2P(K) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Επειδή τα ενδεχόμενα Κ–Λ και Λ–Κ είναι ασυμβίβαστα, από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P\left[(K-\Lambda)\cup(\Lambda-K)\right] = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(K-\Lambda)+P(\Lambda-K) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K)-P(K\cap\Lambda)+P(\Lambda)-P(\Lambda\cap K) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K)+P(\Lambda)-2P(K\cap\Lambda) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2P(K\cap\Lambda) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(K\cap\Lambda) = \frac{1}{24}$$

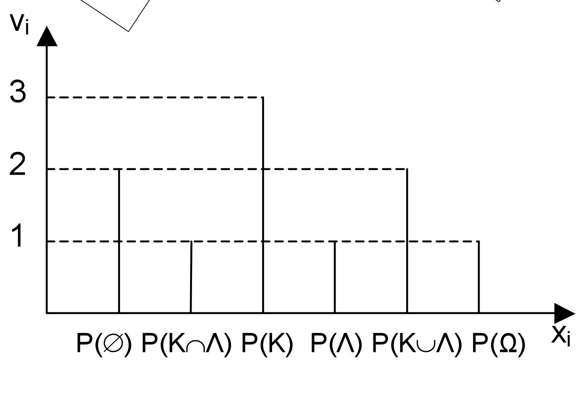
Τέλος:

$$P(K\cup\Lambda) = P(K)+P(\Lambda)-P(K\cap\Lambda) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{24} = \frac{17}{24}.$$

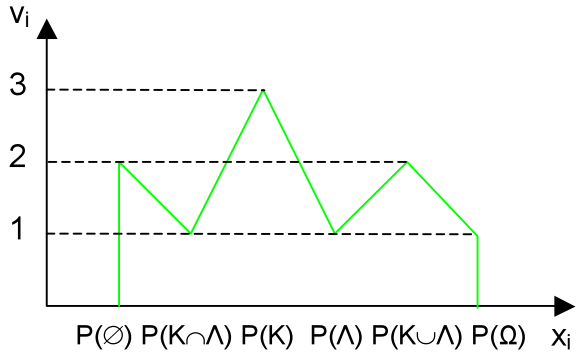
ii) Με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα συχνοτήτων:

x_i	$P(\varnothing)$	$P(K\cap\Lambda)$	$P(K)$	$P(\Lambda)$	$P(K\cup\Lambda)$	$P(\Omega)$
ν_i	2	1	3	1	2	1

κατασκευάζουμε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων των παρατηρήσεων (διακριτή μεταβλητή).



Διάγραμμα συχνοτήτων



Πολύγωνο συχνοτήτων

Σημείωση για τη βαθμολογία του 1ου Θέματος:

Β. *Μονάδες 10. Επιμέρους 4 μονάδες για την 1η ιδιότητα και 6 μονάδες για την 2η ιδιότητα.*