# Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΙΛΟΓΗΣ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## Θέμα 1ο

**Α.1.** Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 92
**Α.2.** Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 149
**Α.3.** Απόδειξη από Σχ. Βιβλίο σελ. 28-29
**Β.** α → Λάθος
β → Σωστό
γ → Σωστό
δ → Λάθος
ε → Λάθος

## Θέμα 2ο

**α)** Πρέπει $x+2\geq 0$ και $\sqrt{x+2}-2\neq 0$

$x\geq -2$ και έστω $\sqrt{x+2}-2=0$

τότε $\sqrt{x+2}=2$

$x+2=4$

$x=2$

Άρα $\sqrt{x+2}-2\neq 0$ όταν $x\neq 2$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-2,2)\cup(2,+\infty)$.

**β)** Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει f(x)=0. Άρα:

$x^2-4=0$ και $x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$

$x^2=4$ και $x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$

$x=\pm 2$ και $x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$

Άρα $x=-2$.

Οπότε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον x΄x είναι το M(-2,0).

**γ)**
$$f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}=$$
$$=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}=\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$$

Άρα $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (2+2)\left(\sqrt{4}+2\right) = 4\cdot 4 = 16$

**δ)** Ο πίνακας γίνεται:

| $x_i$ | $v_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0,1 | 4 | 0,1 |
| 2 | 16 | 0,4 | 20 | 0,5 |
| 3 | 12 | 0,3 | 32 | 0,8 |
| 4 | 8 | 0,2 | 40 | 1 |
| **Σύνολο** | 40 | 1 | - | - |

$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0{,}1$

$N_1 = v_1 = 4$

$F_1 = f_1 = 0{,}1$

$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{16}{40} = 0{,}4$ , $N_2 = v_1 + v_2 = 4 + 16 = 20$

$F_2 = f_1 + f_2 = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$

$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow v_4 = f_4 \cdot v = 0{,}2 \cdot 40 = 8$

$N_4 = v = 40$ και $F_4 = 1$

$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow 4 + 16 + v_3 + 8 = 40 \Rightarrow v_3 = 40 - 28 = 12$

$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{12}{40} = 0{,}3$ , $N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 12 = 32$

$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$

## <u>Θέμα 3ο</u>

**α)** Στον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου» καταγράφουμε τα δεδομένα μας.

| Τμήμα / Φύλλο | Διοικητικό τμήμα | Τεχνικό τμήμα | Σύνολο |
|---|---|---|---|
| Άνδρες | 10 | 50 | 60 |
| Γυναίκες | 30 | 10 | 40 |
| **Σύνολο** | 40 | 60 | 100 |

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{50}{100}=0,5$$

$B_1$: «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να είναι άνδρας»
$B_2$: «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να εργάζεται στο διοικητικό τμήμα».

$$B=(B_1\cup B_2)\Rightarrow P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P\left(B_2\right)-P(B_1\cap B_2)$$
$$=\frac{60}{100}+\frac{40}{100}-\frac{10}{100}=\frac{90}{100}=0,9$$

**β)** Το άθροισμα των ηλικιών όλων των υπαλλήλων θα είναι:

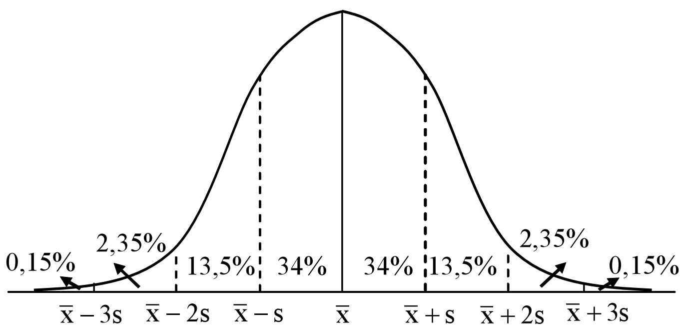
$$\sum_{i=1}^{100}t_i=60\cdot 40+40\cdot 40=2400+1600=4000$$

Μετά την πρόσληψη των νεότερων υπαλλήλων το άθροισμα των ηλικιών των υπαλλήλων θα είναι:

$$\overline{y}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i \quad \text{άρα} \quad \sum_{i=1}^{\nu}t_i=\nu\cdot\overline{y} \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{100}t_i=100\cdot 39,6=3960$$

Έστω c το πλήθος των ατόμων που αποχώρησαν. Επειδή θα προσληφθούν c άτομα αλλά κατά 4 χρόνια νεότερα, θα ισχύει ότι: 4000 – 3960 = 4c δηλαδή 4c = 40 άρα c = 10

**γ)** Η καμπύλη συχνοτήτων στην κανονική κατανομή είναι:

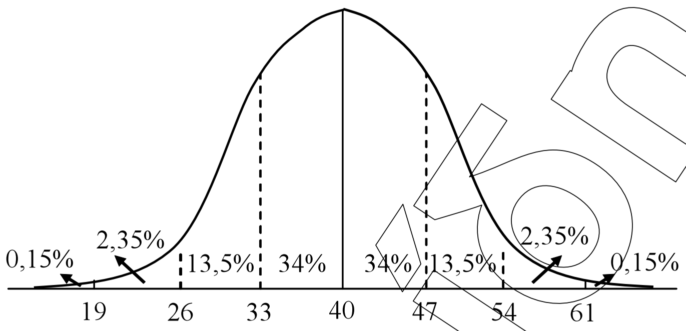


Επειδή το 2,5% (δηλαδή 2,35% + 0,15% = 2,5%) των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, $\bar{x} - 2s = 26$ **(1)**

Η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων είναι: $\bar{x} = \dfrac{60 \cdot 40 + 40 \cdot 40}{100} = 40$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε: 2s = 14 $\Leftrightarrow$ s = 7.

Επομένως η καμπύλη συχνοτήτων θα είναι:




Κάτω από 33 χρόνια θα είναι το 13,5% + 2,35% + 0,15% = 16% των υπαλλήλων της εταιρίας δηλ. $\dfrac{16}{100} \cdot 100 = 16$ υπάλληλοι.

**δ)** Είναι: $s^2 = \dfrac{1}{100}\left[\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2}{100}\right] \Leftrightarrow S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2}{100} - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2}{100^2} \Leftrightarrow$

$$100^2\ s^2 = 100^2\ \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2}{100} - 100^2\ \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2}{100^2} \Leftrightarrow 100^2\ s^2 = 100 \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 10000\ s^2 = 250000 \Leftrightarrow S^2 = 25 \Leftrightarrow S = 5$$

Στην κανονική κατανομή το εύρος $R \approx 6s$, επομένως $R \approx 30$.

## Θέμα 4ο

**Α.** Είναι: $\bar{x} = \dfrac{x+5e^x+x+4-7x+1}{5} = \dfrac{5e^x-5x+5}{5} = e^x - x + 1$

Έστω f(x)= $e^x$-x+1, $x \in \Re$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με f΄(x) = $e^x$-1.

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | | ↘ | 2<br>min | ↗ | |

Για x=0 η f παρουσιάζει ελάχιστο το $m = f(0) = 2$

**Β.** Για m=2 είναι: g(x)=$2x^2$-$\kappa^2$x+3.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με g΄(x)=4x-$\kappa^2$.

Η εφαπτομένη της $C_g$ στο Α(1, g(1)) είναι παράλληλη στον x΄x όταν g΄(1)=0

$\Leftrightarrow$ 4-$\kappa^2$=0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\kappa^2$=4 $\Leftrightarrow$

κ=2 ή κ=-2 (**απορρίπτεται** αφού $\kappa \in \Omega$)

**Άρα** κ=2.

Ε={1,3,4,5,6,7}

Οπότε $P(\text{E}) = \dfrac{N(\text{E})}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{7}$

**Γ.** Αφού $\text{A} \subseteq \text{B}$ τότε $\text{A} \cap \text{B} = \text{A}$ και $\text{P}(\text{A} \cap \text{B}) = \text{P}(\text{A})$ οπότε

$h(x) = \dfrac{3 - 2 \cdot \text{P}(A)}{12} x^3 + \dfrac{\text{P}(A)}{2} x^2 + x + 2008, \ x \in R$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x) = \dfrac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} x^2 + P(A) \cdot x + 1, \ x \in R$

και

$\Delta = P^2(A) - 4 \cdot \dfrac{3 - 2 \cdot P(A)}{4} \cdot 1 = P^2(A) - 3 + 2 \cdot P(A) = P^2(A) + 2 \cdot P(A) + 1 - 4 =$

$= (P(A) + 1)^2 - 4 < 0$ γιατί:

Το ενδεχόμενο Α αποκλείεται να είναι ο δειγματικός χώρος Ω (διότι αν ήταν, θα έπρεπε και Β=Ω, άτοπο αφού Α $\neq$ Β) άρα Ρ(Α) $\neq 1$ και επειδή $0 \leq \text{P}(\text{A}) \leq 1$ έπεται ότι $0 \leq \text{P}(\text{A}) < 1$ άρα Ρ(Α)+1<2 οπότε $(P(A)+1)^2 < 4$.

***( εναλλακτικά: το τριώνυμο*** $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$ ***έχει Δ' =16 και ρίζες τις -3 και 1 οπότε για P(A)*** $\in [0,1)$ ***είναι*** $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$ ***< 0 ).***

Αφού Δ<0 η $h'(x)$ παίρνει τιμές ομόσημες του $\dfrac{3-2\cdot P(A)}{4}$ για κάθε $x \in R$ και αφού $\dfrac{3-2\cdot P(A)}{4}$ φανερά θετικό, έχω $h'(x)>0$ για κάθε $x \in R$, άρα η συνάρτηση h είναι γνήσια αύξουσα στο R.