

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
 / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 7 Απριλίου 2013

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x^2$  είναι  $f'(x) = (x^2)' = 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(7 μονάδες)

**A.2.** Να ορίσετε το σταθμισμένο αριθμητικό μέσο ή σταθμικό μέσο για τις τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ενός συνόλου δεδομένων που έχουν διαφορετική βαρύτητα και η οποία εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας  $w_1, w_2, \dots, w_n$ .

(4 μονάδες)

**A.3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;

(4 μονάδες)

**A.4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $A$  και  $g(x) \neq 0$  για

κάθε  $x \in A$  τότε ισχύει ότι:  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$ , για κάθε  $x \in A$

**β)** Ο συντελεστής μεταβλητότητας  $CV$  παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι ένα μέτρο σχετικής διασποράς.

**γ)** Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων είναι πάντα μία από τις παρατηρήσεις.

**δ)** Το ενδεχόμενο «**Διαφορά του Β από το Α**» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το **A** αλλά όχι το **B**.

**ε)** Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.

(2X5 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Β**

Ο χρόνος αναμονής σε min των μαθητών ενός σχολείου στη στάση του λεωφορείου έχει ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Το εύρος είναι  $R = 20$  min, η κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης είναι 10 min, 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4 min, 20 μαθητές λιγότερο από 12 min, το 84% περιμένουν χρόνο λιγότερο από 16 min,  $N_5 = 50$  και  $F_2 = 0,2$ .

**B.1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος  $c$  της κάθε κλάσης είναι 4 και να μεταφέρετε στο τετράδιο σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα

χρόνος σε min	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$F_i \%$
[...,...)						
[...,...)						
[...,...)						
[...,...)						
[...,...)						
<b>Σύνολο</b>						

(8 μονάδες)

**B.2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη διάμεσο του χρόνου αναμονής των μαθητών του δείγματος

(7 μονάδες)

**B.3.** Θεωρούμε ότι όλοι οι χρόνοι των μαθητών είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι σε κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις. Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος από 10 min

B: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8 min και λιγότερος από 17 min

α) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A)$  και  $P(B)$

(5 μονάδες)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες  $P(A \cup B)$ ,  $P(A - B)$ ,  $P((A \cup B) - A)$ .

(5 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε μια μεταβλητή  $X$  η οποία μετράει σε  $mmHg$  τη συστολική πίεση ενός δείγματος  $A$   $n$  ατόμων μιας πόλης και η οποία ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή. Δίνεται ότι η διάμεσος  $\delta$  της κατανομής είναι  $\delta = 13 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5x - 5}{2\sqrt{x+3} - 4} \right)$  σε  $mmHg$  και ότι το 84% του δείγματος έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125  $mmHg$ .

Γ.1. Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}_A$ , την τυπική απόκλιση  $s_A$  του δείγματος  $A$  και να εξετάσετε αν το δείγμα  $A$  είναι ομοιογενές.

(8 μονάδες)

Γ.2. Έστω ότι για το δείγμα  $A$  ισχύει ότι  $\bar{x}_A = 130 mmHg$  και  $s_A = 5 mmHg$ . Ένα δεύτερο δείγμα  $B$ , επίσης  $n$  ατόμων, παρουσιάζει συστολική πίεση  $y_i = x_i + 10 mmHg$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , όπου  $x_i$  η συστολική πίεση των ατόμων του δείγματος  $A$ .

α) Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{y}_B$ , την τυπική απόκλιση  $s_B$  και να συγκρίνετε ως προς την ομοιογένεια τα δύο δείγματα.

(7 μονάδες)

β) Αν επιπλέον το πλήθος των ατόμων του δείγματος  $A$ , των οποίων η συστολική πίεση παίρνει τιμές στο διάστημα  $(\bar{x}_A + s_A, \bar{x}_A + 2s_A)$ , είναι 540,

i. να βρείτε το μέγεθος  $n$  του δείγματος  $A$ .

(5 μονάδες)

ii. Να βρείτε πόσα συνολικά άτομα και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135  $mmHg$ .

(5 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , με  $a > 0$ , και η εφαπτομένη

(ε):  $y = -\frac{1}{2}x + \beta$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  της γραφικής της παράστασης.

Δ.1. α) Να δείξετε ότι  $\alpha = \beta = 1$ .

(5 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(5 μονάδες)

**Δ.2.** Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  $A, B, \Gamma$ , ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , που οι πιθανότητες των ενδεχομένων του δίνονται από τις τεταγμένες  $y$ , σημείων  $(x, y)$  της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$ .

**α)** Για τις τεταγμένες  $x$  των παραπάνω σημείων  $(x, y)$ , να αποδείξετε ότι  $0 \leq x \leq 2$ .

(2 μονάδες)

**β)** Έστω τα σημεία  $K\left(\frac{2}{5}, y_1\right), M\left(\frac{4}{5}, y_2\right), N\left(\frac{7}{5}, y_3\right)$  της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$ . Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων  $(A \cap B)$ ,  $A \cup B$  και  $A$  είναι διαφορετικές ανά δύο και στοιχεία του συνόλου  $\{y_1, y_2, y_3\}$ , τότε:

**i.** Να αποδείξετε ότι  $P(A) = \frac{3}{10}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

(5 μονάδες)

**ii.** Να αποδείξετε ότι  $f(P(A \cap B')) > f(P(A - B'))$

(4 μονάδες)

**iii.** Αν  $P(\Gamma) = \frac{3}{10}$  να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{5} \leq P(B - \Gamma) \leq \frac{1}{2}$

(4 μονάδες)

Σας ευχόμαστε **Επιτυχία.**

Σήμερα και στις Πανελλήνιες Εξετάσεις