



ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδες 62-63.

Α2. α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ ΒΒ1. α. $x^2 - 5x + 4 = 0$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4$$

β. Ισχύει $|x|^2 = x^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $|x|^2 - 5|x| + 4 = 0$

Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε πρέπει να είναι $\omega \geq 0$ (1). Έτσι η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$ η οποία έχει λύσεις, όπως φαίνεται από το προηγούμενο ερώτημα, τους αριθμούς 1 και 4. Και οι δύο λύσεις γίνονται δεκτές αφού ικανοποιούν την (1).

Έτσι έχουμε: $\omega = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$ και

$$\omega = 4 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -4$$

Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $-4, -1, 1, 4$

γ. **1^{ος} τρόπος**

$$(x-1)^2 = 3(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 3x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Επομένως οι λύσεις είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ σύμφωνα με το α ερώτημα.

2^{ος} τρόπος

$$(x-1)^2 = 3(x-1) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[(x-1)-3] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=4$$

3^{ος} τρόπος

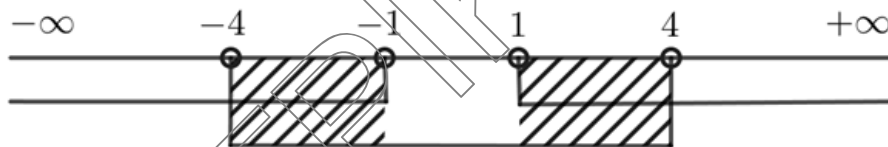
Εύκολα παρατηρούμε ότι η $x=1$ είναι λύση της εξίσωσης. Αναζητούμε λύσεις για $x \neq 1$. Τότε είναι $x-1 \neq 0$. Διαίρουμε και τα δύο μέλη της αρχικής με $x-1$ οπότε έχουμε $x-1=3$ ή $x=4$. Επομένως η εξίσωση έχει τελικά, λύσεις $x=1$, $x=4$

B2. Σύμφωνα με όσα έχουμε από τη λύση του B1.β. η ανίσωση γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 < 0$.

Το τριώνυμο του πρώτου μέλους έχει θετικό συντελεστή στο δευτεροβάθμιο όρο του.

Επομένως, από τον κανόνα του προσήμου τριωνύμου θα παίρνει αρνητικές τιμές για $1 < \omega < 4$ οπότε λόγω και της (1) έχουμε τελικά:

$$1 < \omega < 4 \Leftrightarrow 1 < |x| < 4 \Leftrightarrow (|x| > 1 \text{ και } |x| < 4) \Leftrightarrow [(x < -1 \text{ ή } x > 1) \text{ και } -4 < x < 4]$$



Από τη συναλήθευση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει τελικά ότι $x \in (-4, -1) \cup (1, 4)$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \quad A = \sqrt[3]{4\sqrt{2+5\sqrt{32}}} = \sqrt[3]{4\sqrt{2+5\sqrt{2^5}}} = \sqrt[3]{4\sqrt{2+2}} = \sqrt[3]{4\sqrt{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$B = (\sqrt{\pi-2})^2 + \sqrt{(\pi-4)^2 + 1} = \pi - 2 + |\pi - 4| + 1 = \pi - 2 - \pi + 4 + 1 = 3$$

$$\text{διότι } 2 < \pi < 4 \Leftrightarrow (\pi - 2 > 0 \text{ και } \pi - 4 < 0)$$

Γ2. 1^{ος} τρόπος

$$\left(\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} + \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \right) \cdot \frac{A - B}{A + B} = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right) \cdot \frac{2 - 3}{2 + 3}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \right) \cdot \frac{-1}{5}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} + \frac{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \right) \cdot \frac{-1}{5}$$

$$= \left(\frac{2 + 2\sqrt{6} + 3}{2 - 3} + \frac{2 - 2\sqrt{6} + 3}{2 - 3} \right) \cdot \frac{-1}{5}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{6} + 3 + 2 - 2\sqrt{6} + 3}{-1} \cdot \frac{-1}{5}$$

$$= \frac{10}{-1} \cdot \frac{-1}{5} = \frac{-10}{-5} = 2$$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} + \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \right) \cdot \frac{A - B}{A + B} = \\ & = \left(\frac{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2}{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})} + \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2}{(\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B})} \right) \cdot \frac{A - B}{A + B} \\ & = \left(\frac{(\sqrt{A})^2 + 2\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} + (\sqrt{B})^2}{(\sqrt{A})^2 - (\sqrt{B})^2} + \frac{(\sqrt{A})^2 - 2\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} + (\sqrt{B})^2}{(\sqrt{A})^2 - (\sqrt{B})^2} \right) \cdot \frac{A - B}{A + B} \\ & = \left(\frac{A + 2\sqrt{A \cdot B} + B}{A - B} + \frac{A - 2\sqrt{A \cdot B} + B}{A - B} \right) \cdot \frac{A - B}{A + B} \\ & = \frac{A + 2\sqrt{A \cdot B} + B + A - 2\sqrt{A \cdot B} + B}{A - B} \cdot \frac{A - B}{A + B} \\ & = \frac{2(A + B)}{A - B} \cdot \frac{A - B}{A + B} = 2 \end{aligned}$$

Γ3. (α)

$$\begin{cases} |Ax - B| = B - Ax \\ A = 2 \\ B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

(β) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει:

$$\begin{aligned} |Ax - B| - (B - Ax) & \neq 0 \Leftrightarrow |Ax - B| \neq B - Ax \\ & \Leftrightarrow |2x - 3| \neq 3 - 2x \\ & \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

διότι, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι,

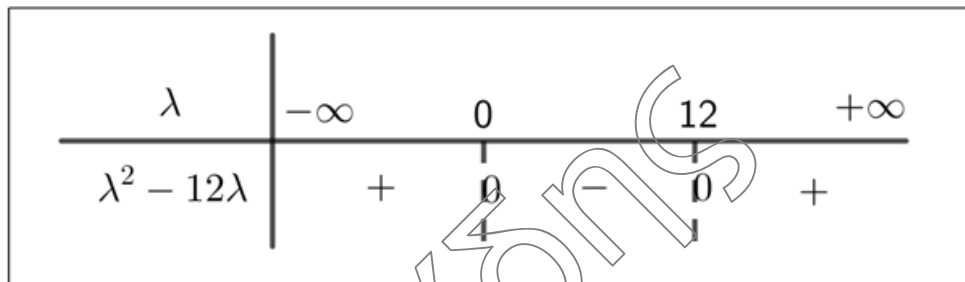
$$|2x - 3| = 3 - 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\Delta = [-(\lambda - 2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2\lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 8\lambda - 4 = \lambda^2 - 12\lambda$

Αφού το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες, ισχύει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0 \quad \text{ή} \quad \lambda > 12 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$$



Δ2. (α)

- $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda - 2)}{1} = \lambda - 2$

- $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\lambda + 1}{1} = 2\lambda + 1$

(β)

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 + x_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 x_2 + 1) \geq 0$$

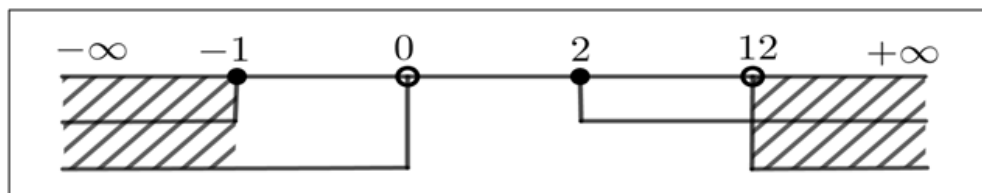
$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(2\lambda + 1 + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(2\lambda + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\lambda - 2)(\lambda + 1) \geq 0$$

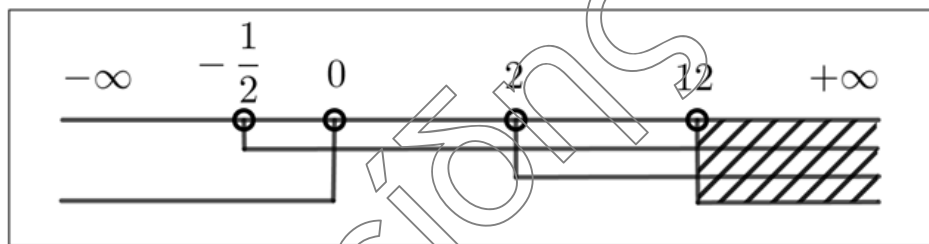
$$\Leftrightarrow \lambda \leq -1 \quad \text{ή} \quad \lambda \geq 2$$

και επειδή $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$ είναι τελικά $\lambda \leq -1$ ή $\lambda > 12$.



- Δ3. (α) Για να αποτελούν, οι ρίζες x_1, x_2 του παραπάνω τριωνύμου, διαστάσεις ορθογώνιου, πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί. Αυτό συμβαίνει όταν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 12 \\ 2\lambda + 1 > 0 \\ \lambda - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 12 \\ \lambda > -\frac{1}{2} \\ \lambda > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 12 \end{cases}$$



- (β) Η περίμετρος του ορθογώνιου είναι

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2(\lambda - 2)$$

Επομένως,

$$\begin{cases} \Pi = 2(\lambda - 2) \\ \Pi = 28 \end{cases} \Leftrightarrow 2(\lambda - 2) = 28 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 14 \Leftrightarrow \lambda = 16 > 12 \text{ (δεκτή)}$$

Υπολογισμός εμβαδού:

1^{ος} τρόπος:

$$E = x_1 x_2 = P = 2\lambda + 1 = 2 \cdot 16 + 1 = 33 \text{ cm}^2$$

2^{ος} τρόπος:

Για $\lambda = 16$ το τριώνυμο γίνεται: $x^2 - 14x + 33 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33 = 196 - 132 = 64 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{22}{2} = 11 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Επομένως, $E = x_1 \cdot x_2 = 11 \cdot 3 = 33 \text{ cm}^2$