ΕΠΑ.Λ.
Α' ΟΜΑΔΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 134.
β) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 138.

Β. **α)** ΛΑΘΟΣ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΣΩΣΤΟ

Γ. **α)** Β
β) Ε

ΘΕΜΑ 2ο

α) Έχουμε $\bar{x} = \frac{10+11+12+13+12+14+\omega+\omega+1+16+19}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13 = \frac{108+2\omega}{10} \Leftrightarrow 108+2\omega = 130 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\omega = 130 - 108 \Leftrightarrow 2\omega = 22 \Leftrightarrow \omega = 11.$

Άρα οι τιμές είναι: 10, 11, 12, 13, 12, 14, 11, 12, 16, 19.

β) **i)** Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι: 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 16, 19.
Η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των μεσαίων τιμών δηλαδή:

$\delta = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2}.$

ii) Το εύρος είναι: R = 19 – 10 = 9.

iii) Η επικρατούσα τιμή είναι το 12 με τη μεγαλύτερη συχνότητα 3.

iv) Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{(10-13)^2+2\cdot(11-13)^2+3\cdot(12-13)^2+(13-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2+(19-13)^2}{10} =$$

$$= \frac{9+2\cdot4+3\cdot1+1+9+36}{10} = \frac{66}{10} = 6,6\,.$$

Η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$ και $CV = \frac{2,57}{13}\cdot 100 \simeq 19,7\%$.

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Περιορισμός: $x \neq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι: Α = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) $f'(x) = \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)' = \dfrac{(\eta\mu x)' x - \eta\mu x (x)'}{x^2} =$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.

γ) $f''(x) = \left(\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}\right)' = \dfrac{(x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)' x^2 - (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(x^2)'}{x^4} =$

$= \dfrac{\left[(x)'\sigma\upsilon\nu x + x(\sigma\upsilon\nu x)' - (\eta\mu x)'\right] x^2 - (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)2x}{x^4} =$

$= \dfrac{(\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)x^2 - (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)2x}{x^4} =$

$= \dfrac{-x^3\eta\mu x - 2x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x}{x^4} = \dfrac{x(-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x)}{x^4} =$

$= \dfrac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^3}$.

Απόδειξη: $x f''(x) + 2f'(x) + x f(x) =$

$= x\dfrac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^3} + 2\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} + x\dfrac{\eta\mu x}{x} =$

$= \dfrac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x}{x^2} + \dfrac{2x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x}{x^2} + \eta\mu x =$

$= \dfrac{-x^2\eta\mu x - 2x\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x}{x^2} + \eta\mu x =$

$= \dfrac{-x^2\eta\mu x}{x^2} + \eta\mu x = -\eta\mu x + \eta\mu x = 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έχουμε:

$\alpha = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 2 - 1 = 1$

$\beta = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x} = \dfrac{2\cdot 1 + 1}{1} = \dfrac{3}{1} = 3$.

Άρα: $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ και έτσι: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ με $x \in [-2, 2]$.

β) Έχουμε: $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

Βρίσκουμε τα σημεία που μηδενίζεται η f':

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

Τότε ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι:

x	-2		-1		1		2
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	τε		τμ		τε		τμ

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-2, -1]$ και $[1, 2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.
Επίσης η συνάρτηση f παρουσιάζει:
τοπικό ελάχιστο στο $x = -2$ το $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$.
τοπικό μέγιστο στο $x = -1$ το $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$.
τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$.
τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$.

γ) Το εμβαδόν είναι: $E = \int_{-1}^{1} |f'(x)| dx = \int_{-1}^{1} |3x^2 - 3| dx$.
Παρατηρούμε ότι $3x^2 - 3 \le 0$ για $x \in [-1, 1]$ και έτσι:

$$E = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3) dx = -3\int_{-1}^{1} x^2 dx + 3\int_{-1}^{1} 1 dx = -3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 3[x]_{-1}^{1} =$$

$$= -\left[x^3\right]_{-1}^{1} + 3[x]_{-1}^{1} = -\left[1^3 - (-1)^3\right] + 3[1 - (-1)] = -(1+1) + 3(1+1) =$$

$$= -2 + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4 \text{ τ.μ.}$$