

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013**

**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 45.

**A.2.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 100.

**A.3.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 38.

- A.4.**
- i. Λάθος
  - ii. Σωστό
  - iii. Λάθος
  - v. Λάθος
  - vi. Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**B.1.** Έχουμε  $\vec{AB} = \left( 2-1, -1+\frac{3}{2} \right) = \left( 1, \frac{1}{2} \right)$  και  $\vec{B\Gamma} = \left( \kappa-2, \frac{\kappa-4}{2}+1 \right) = \left( \kappa-2, \frac{\kappa-2}{2} \right)$

Είναι  $\det(\vec{AB}, \vec{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \kappa-2 & \frac{\kappa-2}{2} \end{vmatrix} = \frac{\kappa-2}{2} - \frac{\kappa-2}{2} = 0$ , οπότε  $\vec{AB} \parallel \vec{B\Gamma}$ .

Επειδή τα διανύσματα  $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$  έχουν κοινό το σημείο Β, τότε έχουν τον ίδιο φορέα. Έτσι, τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

**B.2.** Είναι  $\vec{AB} = \left( 1, \frac{1}{2} \right)$  και  $\vec{BO} = (-2, 1)$ . Έχουμε  $\vec{AB} \cdot \vec{BO} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0$ ,

άρα  $\text{syn}(\widehat{AB, BO}) < 0$ . Οπότε η γωνία  $(\widehat{AB, BO})$  είναι αμβλεία.

**B.3.** Είναι  $\overline{AB} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\overline{AG} = \left(\kappa - 1, \frac{\kappa - 4}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(\kappa - 1, \frac{\kappa - 1}{2}\right)$  και  $\overline{BG} = \left(\kappa - 2, \frac{\kappa - 2}{2}\right)$ .

Άρα  $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = \kappa - 1 + \frac{\kappa - 1}{4} = \frac{5\kappa - 5}{4}$  και  $|\overline{BG}|^2 = (\kappa - 2)^2 + \frac{(\kappa - 2)^2}{4} = \frac{5(\kappa - 2)^2}{4}$ .

Πρέπει  $\frac{5\kappa - 5}{4} = 2 \cdot \frac{5(\kappa - 2)^2}{4} \Leftrightarrow \kappa - 1 = 2(\kappa - 2)^2 \Leftrightarrow$

$\kappa - 1 = 2\kappa^2 - 8\kappa + 8 \Leftrightarrow 2\kappa^2 - 9\kappa + 9 = 0$ .

Έχουμε  $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9$ , οπότε  $\kappa = 3$  ή  $\kappa = \frac{3}{2}$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ.1.** Η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την :

$$\lambda^2 - \lambda^2 x - \lambda y + \frac{1+x}{4} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda^2 x - 4\lambda y + 1 + x = 0 \Leftrightarrow (1 - 4\lambda^2)x - 4\lambda y + 1 + 4\lambda^2 = 0 \quad (2)$$

Έστω ότι η (2) δεν παριστάνει ευθεία. Τότε  $1 - 4\lambda^2 = 0$  και  $-4\lambda = 0$  δηλ.

$\lambda = \pm \frac{1}{2}$  και  $\lambda = 0$  που είναι αδύνατο. Άρα η (2) για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , παριστάνει ευθεία.

**Γ.2** 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Στην (2) θέτουμε διαδοχικά:  $\lambda = \frac{1}{2}$  και  $\lambda = 0$  οπότε έχουμε :

$-2y + 2 = 0$  και  $x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$  και  $x = -1$ . Στην (2) θέτουμε  $x = -1$  και

$y = 1$  οπότε έχουμε :  $-1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 4\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$  ή  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

Η (2) λοιπόν δεν ισχύει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , οπότε δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (2)

2<sup>ος</sup> τρόπος :

Έστω ότι όλες οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το σημείο  $M(x_0, y_0)$ .

Η εξίσωση (1) γίνεται :  $\lambda^2(1 - x_0) - \lambda y_0 + \frac{1 + x_0}{2} = 0 \quad (3)$ .

Η εξίσωση (3) πρέπει να ισχύει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , οπότε  $1 - x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$

και  $\frac{1 + x_0}{4} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$  που είναι αδύνατο.

Έτσι, δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (1).

Γ.3. Η (2) για  $\lambda=1$  γίνεται:  $(\varepsilon_1): -3x-4y+5=0$  και για  $\lambda=-1$  γίνεται  $(\varepsilon_2): -3x+4y+5=0$ .

Τα σημεία τομής των  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  με τον  $y'$ , δηλαδή με την ευθεία  $(\varepsilon): x=0$  είναι αντίστοιχα:  $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$  και  $B\left(0, -\frac{5}{4}\right)$ .

Το σημείο τομής  $\Gamma$  των  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  προκύπτει από την λύση του συστήματος:  $(\Sigma) \begin{cases} -3x-4y+5=0 \\ -3x+4y+5=0 \end{cases}$ .

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:  $-6x+10=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$  και  $-8y=0 \Leftrightarrow y=0$  οπότε  $\Gamma\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ .

Έχουμε  $\overline{AB} = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$  και  $\overline{A\Gamma} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{4}\right)$ .

Οπότε  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{6} = \frac{25}{12}$  τ.μ.

Γ.4. Από το  $O(0,0)$  φέρνουμε ευθεία  $(\delta)$  κάθετη στην  $(\varepsilon_1)$ .

Είναι  $\lambda(\varepsilon_1) = -\frac{3}{4}$  άρα  $\lambda(\delta) = \frac{4}{3}$ .

Η εξίσωση της  $(\delta)$  είναι:  $y = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow 4x-3y=0$ .

Το σημείο τομής  $\Delta$  των  $(\delta)$  και  $(\varepsilon_1)$  είναι το ζητούμενο σημείο, το οποίο προκύπτει από τη λύση του συστήματος  $(\Sigma) \begin{cases} 4x-3y=0 \\ -3x-4y=-5 \end{cases}$

Είναι  $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -16-9 = -25$ ,  $D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -15$  και  $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -20$

Άρα  $x = \frac{-15}{-25} = \frac{3}{5}$  και  $y = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}$ , οπότε  $\Delta\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ.1.** Η (1) είναι ισοδύναμη με την  $x^2 + y^2 + (\lambda - 2)x + (\lambda + 2)y + \frac{\lambda^2}{2} = 0$  (2).

Είναι  $A = \lambda - 2$ ,  $B = \lambda + 2$  και  $\Gamma = \frac{\lambda^2}{2}$ , οπότε

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda - 2)^2 + (\lambda + 2)^2 - 4 \frac{\lambda^2}{2} = 8 > 0.$$

Έτσι, η (2) παριστάνει ίσους κύκλους με ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ .

**Δ.2.** Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι:  $K\left(\frac{2-\lambda}{2}, \frac{-2-\lambda}{2}\right)$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Έστω  $x = \frac{2-\lambda}{2}$  και  $y = \frac{-2-\lambda}{2}$  και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:  $x - y = 2$ .

Δηλ. τα κέντρα των κύκλων κινούνται στην ευθεία  $(\varepsilon): x - y - 2 = 0$ .

(Ένας άλλος τρόπος λύσης θα ήταν με απαλοιφή του  $\lambda$  από τις συντεταγμένες του  $K$ ).

**Δ.3.** Επειδή οι κύκλοι είναι ίσοι, τότε η  $(\varepsilon)$  είναι η μεσοπαράλληλος των  $(\delta_1), (\delta_2)$  με  $d(\varepsilon, \delta_1) = d(\varepsilon, \delta_2) = \sqrt{2}$ .

Οι ευθείες  $(\delta_1), (\delta_2)$  αφού είναι παράλληλες της  $(\varepsilon)$  είναι μορφής:  $(\delta): x - y + \gamma = 0$ .

Έστω  $B(2, 0)$  ένα σημείο της  $(\varepsilon)$  τότε:

$$d(\varepsilon, \delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow d(B, \delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2 + \gamma|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |2 + \gamma| = 2 \Leftrightarrow 2 + \gamma = 2 \quad \text{ή} \quad 2 + \gamma = -2$$

άρα  $\gamma \neq 0$  ή  $\gamma = -4$ .

Οπότε  $(\delta_1): x - y = 0$  και  $(\delta_2): x - y - 4 = 0$ .

**Δ.4. i.** Επειδή η  $(\varepsilon)$  δεν είναι κατακόρυφη και εφάπτεται της παραβολής, πρέπει το σύστημα των εξισώσεων:  $x^2 = 2py$  και  $x - y - 2 = 0$  να έχει μοναδική λύση. Έτσι, έχουμε:  $x^2 = 2p(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2px + 4p = 0$ .

Πρέπει λοιπόν η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης, να είναι ίση με μηδέν.

$$\text{Δηλαδή } 4p^2 - 16p = 0 \Leftrightarrow p = 4 \text{ γιατί } p \neq 0.$$

Έτσι  $(C): x^2 = 8y$  με εστία  $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$  δηλαδή  $E(0, 2)$  και διευθετούσα

$$(\delta): y = -2$$

ii. Έστω  $A(x_1, y_1) \in (C)$  τότε  $x_1^2 = 8y_1$  (3). Η εφαπτομένη της (C) στο A είναι :

$$(\eta) : xx_1 = 4y + 4y_1 \Leftrightarrow x \cdot x_1 - 4y - 4y_1 = 0.$$

Επειδή  $(\eta) \perp (\varepsilon)$  και  $\lambda_\eta = \frac{x_1}{4}, \lambda_\varepsilon = 1$ , τότε  $\frac{x_1}{4} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -4$ .

Από την (3) έχουμε:  $16 = 8y_1 \Leftrightarrow y_1 = 2$ .

Έτσι, η εξίσωση της  $(\eta)$  είναι:  $-4x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$ .

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΣ  
ΤΡΙΚΩΝ