



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 83

B. α. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 41
 β. Θεωρία από βιβλίο ΟΕΔΒ σελ 113

Γ. 1. Λ
 2. Σ
 3. Σ
 4. Λ
 5. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

1. α. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

β. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2 \cdot 1 = 2^2 + 1^2 + 2 = 7 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{7}$

γ. $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}$

2.

α. $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AG}) = \frac{1}{2}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \frac{1}{2}(3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = \frac{3}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

β. $\vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

$$3. \quad \cos \left(\widehat{A\vec{M}, B\vec{\Gamma}} \right) = \frac{A\vec{M} \cdot B\vec{\Gamma}}{|A\vec{M}| |B\vec{\Gamma}|} \quad (i)$$

$$\text{Είναι } A\vec{M} \cdot B\vec{\Gamma} = \frac{3}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \frac{3}{2}(\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2) = \frac{3}{2}(4 - 1) = \frac{9}{2}$$

και

$$|A\vec{M}| = \frac{3}{2}|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

$$|B\vec{\Gamma}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα (i)} \Leftrightarrow \cos \left(\widehat{A\vec{M}, B\vec{\Gamma}} \right) = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{7}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$4. \quad \text{Αν } A\vec{\Delta} = \text{προβ}_{A\vec{\Gamma}} A\vec{M} \text{ τότε } A\vec{\Delta} \parallel A\vec{\Gamma} \text{ δηλαδή } A\vec{\Delta} = \lambda A\vec{\Gamma} \text{ και}$$

$$A\vec{M} \cdot A\vec{\Gamma} = A\vec{\Delta} \cdot A\vec{\Gamma} \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda A\vec{\Gamma}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\alpha} + \vec{\beta}^2) = \lambda(4\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta}) \Leftrightarrow$$

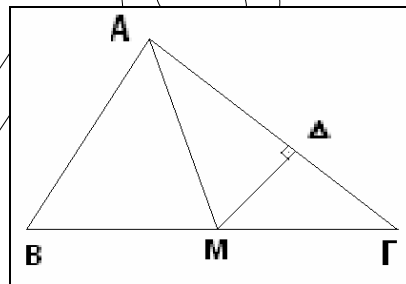
$$\Leftrightarrow 3\vec{\alpha}^2 + \frac{9\vec{\alpha}\vec{\beta}}{2} + \frac{3\vec{\beta}^2}{2} = 4\lambda\vec{\alpha}^2 + \lambda\vec{\beta}^2 + 4\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 4 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 16\lambda + \lambda + 4\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = 21\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

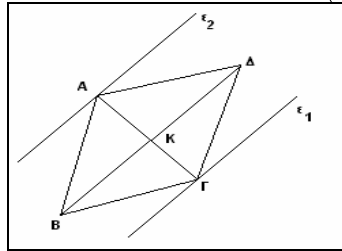
$$\text{δηλαδή } A\vec{\Delta} = \frac{6}{7}A\vec{\Gamma} \Rightarrow |A\vec{\Delta}| = \frac{6}{7}|A\vec{\Gamma}| = \frac{6\sqrt{21}}{7} \text{ αφού}$$

$$|A\vec{\Gamma}|^2 = A\vec{\Gamma}^2 = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 21 \Leftrightarrow |A\vec{\Gamma}| = \sqrt{21}$$



ΘΕΜΑ 3^ο

1. Το κέντρο Κ του παραλληλόγραμμου είναι σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Λύνω το (ε) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$ δηλαδή Κ(4,5)
2. Η διαγώνιος ΑΓ έχει εξίσωση $y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$ και η ΒΔ έχει εξίσωση $y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // ΒΔ$. Αν Μ(α, β) σημείο της ευθείας (ε_1).



Τότε:

$$\text{Θα είναι } d(M, BD) = \frac{d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{2} = \frac{|a - \beta + 1|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |a - \beta + 1| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a - \beta + 1 = 2 \\ \text{ή} \\ a - \beta + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \beta - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ a - \beta + 3 = 0 \end{cases}$$

Άρα (ε_1): $x - y - 1 = 0$ και (ε_2): $x - y + 3 = 0$.

3. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των κορυφών του ΑΒΓΔ. Για την εύρεση του Α λύνω το (Σ) των εξισώσεων των (ε_1) και (ΑΓ) και για του Γ το (Σ) των (ε_2) και (ΑΓ). Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x + 3 - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ άρα } A(2,1) \text{ και}$$

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x + 3 + 3 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases} \text{ δηλαδή } \Gamma(6,9).$$

Αφού $A\vec{D} = (4, 6)$ και $A(2,1)$ τότε αν $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ θα είναι:

$$\begin{cases} x_\Delta - 2 = 4 \\ y_\Delta - 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Delta = 6 \\ y_\Delta = 7 \end{cases} \text{ δηλαδή } \Delta(6,7) \text{ και αφού } K \text{ μέσο } BD \text{ θα είναι:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\kappa} = \frac{x_B + x_{\Delta}}{2} \\ y_{\kappa} = \frac{y_B + y_{\Delta}}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 = \frac{x_B + 6}{2} \\ 5 = \frac{y_B + 7}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_B = 2 \\ y_{\Delta} = 3 \end{array} \right\} \text{ δηλαδή } B(2,3)$$

$$4. \quad (AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Delta) = 2 \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{A\Delta})| = \left\| \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right\| = |0 - 8| = 8 \tau. \mu.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

1. Είναι

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 4\Gamma &= (-2\eta\mu\theta)^2 + (4\sigma\nu\theta)^2 - 4\eta\mu^2\theta = \\ &= 4\eta\mu^2\theta + 16\sigma\nu^2\theta - 4\eta\mu^2\theta = 16\sigma\nu^2\theta > 0 \text{ αν } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Άρα είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K(\eta\mu\theta, -2\sigma\nu\theta)$ και

$$\text{ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{4\sigma\nu\theta}{2} = 2\sigma\nu\theta.$$

$$2. \quad \text{Είναι } \left. \begin{array}{l} x_{\kappa} = \eta\mu\theta \\ y_{\kappa} = -2\sigma\nu\theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\theta = x_{\kappa} \\ \sigma\nu\theta = -\frac{y_{\kappa}}{2} \end{array} \right. \text{ οπότε } \eta\mu^2\theta + \sigma\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow x_{\kappa}^2 + \frac{y_{\kappa}^2}{4} = 1$$

δηλαδή τα κέντρα των κύκλων κινούνται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα $y'y$. Είναι $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$ και $\beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε $\gamma^2 = a^2 - \beta^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{3}$. Έχει λοιπόν εστίες $E'(0, -\sqrt{3})$ και $E(0, \sqrt{3})$ μεγάλο άξονα $2a = 2 \cdot 2 = 4$ και μικρό άξονα $2\beta = 2$

$$\text{και εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Είναι $x_0 = \eta\mu\theta > 0$ και $y_0 = -2\sigma\nu\theta < 0$ γιατί $\theta \in (0, \pi/2)$ οπότε τα σημεία K ανήκουν στο τμήμα της έλλειψης που βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο δηλαδή το $A'B$.

4. Αν $\theta = \frac{\pi}{3}$ τότε ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ και $\rho = 1$. Τότε η ελάχιστη απόσταση

της ευθείας $E(0, \sqrt{3})$ από τον κύκλο είναι

$$d_1 =$$

$$= (EM) = (EK) - \rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + (-1 - \sqrt{3})^2} - 1 = \sqrt{\frac{3}{4} + 1 + 3 + 2\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{\frac{19}{4} + 2\sqrt{3}} - 1 =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ενώ η μέγιστη είναι } d_2 = (EZ) = (EK) + \rho = \sqrt{\frac{19}{4} + 2\sqrt{3}} + 1 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

