



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Μονάδες 10

- B. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ ;

Μονάδες 5

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν θεωρήσουμε σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  του καρτεσιανού επιπέδου τότε οι συντεταγμένες του μέσου  $M(x, y)$  του  $AB$ ,

$$\text{είναι } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2. Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$  και αντιστρόφως

3. Η ευθεία  $x = x_0$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 0$

4. Η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$  όπου  $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$ , έχει εστίες  $E'(-\gamma, 0)$  και  $E(\gamma, 0)$ .

5. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$  είναι οι ευθείες:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha}x.$$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(2\alpha + 1)x + (\alpha - 1)y + 3 = 0$  (1)

i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 8**

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από το σημείο  $M(-1, 2)$ .

**Μονάδες 8**

iii) Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon: x + 5y - 3 = 0$ . Αν  $A$  και  $B$  είναι τα σημεία τομής της  $\varepsilon$  με τις ευθείες που προκύπτουν από την (1) για  $\alpha = 0$  και  $\alpha = -1$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AMB$  είναι 3 τ.μ.

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda - 1)x^2 + (2\lambda - 3)y^2 + 6(2 - \lambda)x = 16(\lambda - 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (1).

i) Αν  $\lambda = 1$ , να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει παραβολή  $C_1$  της οποίας να βρείτε την διευθετούσα  $\delta$  και την εστία  $E$ .

**Μονάδες 6**

ii) Αν  $\lambda = 2$ , να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο  $C_2$ , του οποίου να βρείτε το κέντρο  $O$  και την ακτίνα  $R$ .

**Μονάδες 6**

iii) Να βρείτε την εξίσωση και την εκκεντρότητα της έλλειψης, που έχει κέντρο την αρχή  $O$  των αξόνων, μία εστία της κοινή με την εστία  $E$  της παραβολής  $C_1$  και μεγάλο άξονα ίσο με την ακτίνα  $R$  του κύκλου  $C_2$ .

**Μονάδες 6**

iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία  $P_1$  και  $P_2$  των κωνικών τομών  $C_1$  και  $C_2$ , και να αποδείξετε ότι:

$$d(P_1, \delta) - (P_1 E) = d(P_2, \delta) - (P_2 E).$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τα οποία σχηματίζουν

μεταξύ τους γωνία  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , και η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2|\vec{\alpha}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad (1)$$

**A** Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $2\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα  $\rho = \frac{1}{2}|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

**Μονάδες 8**

**B.** Αν  $K(1, 1)$  είναι το κέντρο του παραπάνω κύκλου, να αποδείξετε ότι:

**α.**  $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$  και  $\rho = 1$ .

**Μονάδες 3**

**β.** Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία  $3x + 4y - 12 = 0$

**Μονάδες 5**

**γ.** Η προβολή του  $\vec{\beta}$  στο  $\vec{\alpha}$  είναι ίση με το  $\vec{\alpha}$ .

**Μονάδες 7**

**Καλή τύχη!**