ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 8 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα y΄y και έχουν συντελεστές διευθύνσεως λ_1, λ_2 αντίστοιχα.
Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$.

Μονάδες 9

Α2. Να ορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης λ μίας ευθείας ε, μη παράλληλης με τον άξονα y΄y.

Μονάδες 3

Α3. Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο O(0,0) και ακτίνα ρ, ο οποίος έχει εξίσωση $x^2+y^2=\rho^2$. Αν $A(x_1,y_1)$ είναι σημείο του κύκλου C, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στον κύκλο C, στο σημείο του Α.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

β. Η απόσταση του σημείου $M_o(x_o,y_o)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ δίνεται πάντοτε από τον τύπο $d(M_o, \varepsilon) = \dfrac{|Ax_o+By_o+\Gamma|}{A^2+B^2}$.

γ. Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2-4\Gamma>0$ παριστάνει πάντοτε κύκλο με ακτίνα $\rho=\sqrt{\dfrac{A^2+B^2-4\Gamma}{2}}$.

δ. Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'ME}$, όπου E', Ε είναι οι εστίες της έλλειψης.

ε. Αν C είναι μία παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$, $p\in\mathbb{R}$ τότε σε κάθε περίπτωση ο p ισούται με την απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=1$ και $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|$.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(5,-1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(2,1)$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ και του ύψους ΓΔ του τριγώνου.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2 μονάδες.

Μονάδες 8

Γ3. **i)** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C που διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου, έχει κορυφή το Ο(0,0) και άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Μονάδες 5

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής C, η οποία είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η έλλειψη C_1 με εξίσωση $C_1: 3x^2 + 4y^2 = 12$ και εστίες Ε, Ε΄ και ο κύκλος C_2 με εξίσωση $C_2: x^2 + y^2 = \frac{7}{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΕ΄ είναι ισόπλευρο, όπου Β είναι ένα από τα άκρα του μικρού άξονα της έλλειψης.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ είναι κοινό σημείο των δύο κωνικών τομών C_1, C_2 και να υπολογίσετε όλα τα κοινά τους σημεία.

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε τα σημεία $M(x_0, y_0)$ τα οποία είναι τέτοια ώστε: $2(OM)^2 = 7$ και $(ME) + (ME') = 4$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 8

Δ4. Να υπολογίσετε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{E'PE}$, όπου $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Μονάδες 8

Σας ευχόμαστε επιτυχία