



Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα $y'y$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$.

Μονάδες 10

B. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής, με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ .

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διάνυσμα.

β) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

γ) Η απόσταση της αρχής O των συντεταγμένων από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, ισούται με $\frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

δ) Η εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a+1)^2} = 1$, όπου $a > 0$, παριστάνει έλλειψη με εστίες πάνω στον άξονα $x'x$.

ε) Η εκκεντρότητα μιας υπερβολής είναι πραγματικός αριθμός, μικρότερος της μονάδας.

Μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(-5,3)$, $B(-1,-2)$ και $\Gamma(4,2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}$. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας για τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}$;

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η γωνία φ των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{A\Gamma}$ ισούται με 45° .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $(x+y+1) + κ(x-y-5) = 0$ (1), όπου $κ ∈ ℝ$.

- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου $κ$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

Μονάδες 7

- β. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1), διέρχονται από το σημείο $A(2,-3)$.

Μονάδες 4

- γ. Να βρείτε την τιμή του $κ$, για την οποία η (1) παριστάνει ευθεία $ε$ κάθετη στον άξονα $x'x$. Ποια η εξίσωση της ευθείας $ε$;

Μονάδες 5

- δ. Αν $K(x_0, 0)$ είναι η προβολή του σημείου $A(2,-3)$ στον άξονα $x'x$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο $E(-x_0, 0)$ και την ευθεία $ε$ του ερωτήματος.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (λ+4)x + λy + 2λ = 0$ (1), όπου $λ ∈ ℝ$.

- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου $λ$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα $ρ$.

Μονάδες 8

- β. Να δείξετε ότι το κέντρο K του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση (1), κινείται σε μια ευθεία γραμμή, καθώς το $λ$ μεταβάλλεται στο $ℝ$.

Μονάδες 4

- γ. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C , που έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -2\sqrt{3})$, $E(0, 2\sqrt{3})$ και μεγάλο άξονα $(A'A) = 8$.

Μονάδες 5

- δ. Αν η εφαπτομένη $ε$ της έλλειψης C του ερωτήματος γ, στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ εφάπτεται και του κύκλου C_1 , ο οποίος προκύπτει από την εξίσωση (1) για $λ = 0$, να δείξετε ότι:

i. $y_1^2 = 64(1 - x_1)$

Μονάδες 4

- ii. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, 4)$ και $\vec{\beta} = (x_1, 3 - 4x_1)$ είναι μεταξύ τους κάθετα.

Μονάδες 4

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ