Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2+\psi^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(\chi_1,\psi_1)$ έχει εξίσωση $\chi.\chi_1+\psi.\psi_1=\rho^2$.

(9 μονάδες)

Β.

α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

β. Δώστε τον ορισμό της υπερβολής με εστίες Ε και Ε΄.

(2.3=6 μονάδες)

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ισχύει $(\vec{a}.\vec{\beta})^2=\vec{a}^2.\vec{\beta}^2$.

2. Η ευθεία ε: $Ax+By+\Gamma=0$, με $A, B, \Gamma \in \Re$ και Α.Β>0 σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

3. Η παραβολή $c: y^2=px$ έχει εστία το σημείο $E\left(\frac{P}{4},0\right)$.

4. Αν οι ελλείψεις $c_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{\psi^2}{\beta_1^2}=1$ και $c_2:\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{\beta_2^2}=1$ είναι όμοιες τότε $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$.

5. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})$.

(5x2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{\beta}, \vec{A\Gamma} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ *και* $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α. $\vec{a}.\vec{\beta}$

β. $|\vec{a} + \vec{\beta}|$

γ. $|\vec{a} - \vec{\beta}|$

(9 μονάδες)

2. Έστω Μ μέσο του ΒΓ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{B\Gamma}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$.

(4 μονάδες)

3. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\left(\vec{AM}, \vec{B\Gamma}\right)$

(5 μονάδες)

4. Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του $\vec{AM}$ στο $\vec{A\Gamma}$.

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εξισώσεις διαγωνίων (ΒΔ):y=x+1 και (ΑΓ):y=2x-3. Η διαγώνιος ΒΔ είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι $d = 2\sqrt{2}$ και οι οποίες διέρχονται από τις κορυφές Α και Γ αντιστοίχως. Αν $\vec{A\Delta} = (4,6)$, τότε:

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(5 μονάδες)

2. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν εξισώσεις (ε_1):x-y-1=0 και (ε_2):x-y+3=0.

(8 μονάδες)

3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ, Δ του παραλληλογράμμου.

(8 μονάδες)

4. Να βρείτε το εμβαδόν (ΑΒΓΔ) του παραλληλογράμμου.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 2(\eta\mu\theta)x + 4(\sigma\upsilon\nu\theta)y + \eta\mu^2\theta = 0, (1)$ με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση (1) παριστάνει για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα ρ ως συνάρτηση της γωνίας θ.

(6 μονάδες)

2. Τα κέντρα των κύκλων $K(x_0, y_0)$ που προκύπτουν από την (1), ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη του μεγάλου Α΄Α και μικρού Β΄Β άξονα της, τις εστίες της Ε΄, Ε καθώς και την εκκεντρότητα της ε.

(9 μονάδες)

3. Για τις συντεταγμένες των κέντρων $K(x_0, y_0)$ των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ισχύουν : $x_0>0$, $y_0<0$ και στην συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $K(x_0, y_0)$.

(4 μονάδες)

4. Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση , της εστίας Ε (με θετική συντεταγμένη) από τυχαίο σημείο του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την (1) για $\theta = \frac{\Pi}{3}$, είναι $d_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $d_2 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, αντιστοίχως.

(6 μονάδες)