



## Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $C: x^2 + \psi^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(\chi_1, \psi_1)$  έχει εξίσωση  $\chi \cdot \chi_1 + \psi \cdot \psi_1 = \rho^2$ .

(9 μονάδες)

**B.**

- a. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .  
 b. Δώστε τον ορισμό της υπερβολής με εστίες  $E$  και  $E'$ .

(2.3=6 μονάδες)

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ( $\Sigma$ ) ή Λανθασμένη ( $\Lambda$ ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  του επιπέδου ισχύει  $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{\beta}^2$ .

2. Η ευθεία  $\epsilon: Ax + By + C = 0$ , με  $A, B, C \in \mathbb{R}$  και  $A \cdot B > 0$  σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα  $x$ ' $x$ .

3. Η παραβολή  $c: y^2 = px$  έχει εστία το σημείο  $E\left(\frac{P}{4}, 0\right)$ .

4. Αν οι ελλείψεις  $c_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{\psi^2}{\beta_1^2} = 1$  και  $c_2: \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} = 1$  είναι όμοιες τότε

$\alpha_1 = \alpha_2$  και  $\beta_1 = \beta_2$ .

To εμβαδόν ενός τριγώνου  $ABG$  δίνεται από τον τύπο:  

$$(ABG) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$$

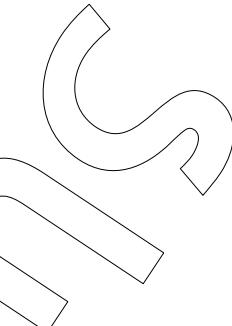
(5x2 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο  $\Delta ABC$  είναι  $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$  με  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 1$  και  $\hat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{\pi}{3}$ .

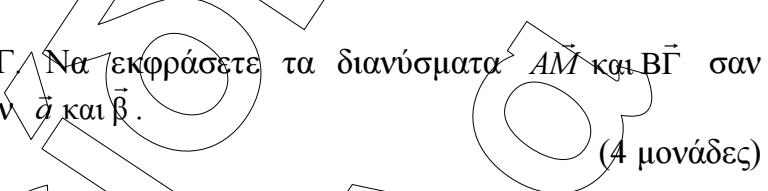
1. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

- α.  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- β.  $|\vec{a} + \vec{b}|$
- γ.  $|\vec{a} - \vec{b}|$



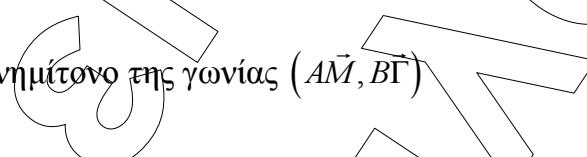
(9 μονάδες)

2. Έστω  $M$  μέσο του  $BG$ . Να εκφράσετε τα διανύσματα  $\vec{AM}$  και  $\vec{BG}$  σαν γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ .



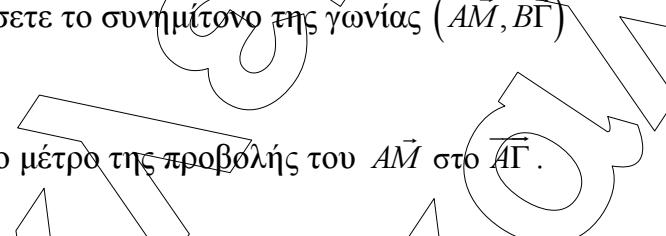
(4 μονάδες)

3. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας  $(\vec{AM}, \vec{BG})$



(5 μονάδες)

4. Να βρεθεί το μέτρο της προβολής του  $\vec{AM}$  στο  $\vec{AG}$ .



(7 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με εξισώσεις διαγωνίων  $(BΔ):y=x+1$  και  $(AΓ):y=2x-3$ . Η διαγώνιος  $BΔ$  είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , των οποίων η μεταξύ τους απόσταση είναι  $d = 2\sqrt{2}$  και οι οποίες διέρχονται από τις κορυφές  $A$  και  $Γ$  αντιστοιχώς. Αν  $\vec{AD} = (4, 6)$ , τότε:

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$ .

(5 μονάδες)

2. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  έχουν εξισώσεις  $(\varepsilon_1):x-y-1=0$  και  $(\varepsilon_2):x-y+3=0$ .

(8 μονάδες)

3. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A, B, Γ, Δ$  του παραλληλογράμμου.

(8 μονάδες)

4. Να βρείτε το εμβαδόν  $(ABΓΔ)$  του παραλληλογράμμου.

(4 μονάδες)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $C : x^2 + y^2 - 2(\eta\mu\theta)x + 4(\sigma\nu\theta)y + \eta\mu^2\theta = 0$ , (1) με  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Να δείξετε ότι:

1. Η εξίσωση (1) παριστάνει για κάθε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και την ακτίνα  $r$  ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$ . (6 μονάδες)
2. Τα κέντρα των κύκλων  $K(x_0, y_0)$  που προκύπτουν από την (1), ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε τα μήκη του μεγάλου Α'Α και μικρού Β'Β άξονα της, τις εστίες της Ε', Ε καθώς και την εκκεντρότητα της ε. (9 μονάδες)
3. Για τις συντεταγμένες των κέντρων  $K(x_0, y_0)$  των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ισχύουν:  $x_0 > 0$ ,  $y_0 < 0$  και στην συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $K(x_0, y_0)$ . (4 μονάδες)
4. Η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση, της εστίας Ε (με θετική συντεταγμένη) από τυχαίο σημείο του κύκλου ο οποίος προκύπτει από την (1) για  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , είναι  $d_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $d_2 = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ , αντιστοίχως. (6 μονάδες)