

**ΤΑΞΗ:** Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

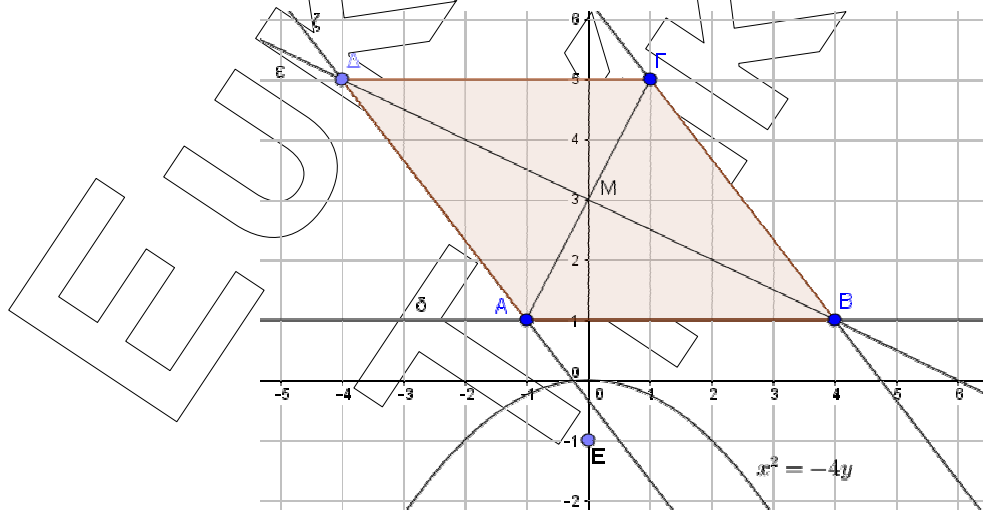
**Ημερομηνία:** Σάββατο 8 Απριλίου 2017  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 83  
 A2. α) Σωστό  
 β) Λάθος  
 γ) Σωστό  
 δ) Λάθος  
 ε) Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**



- B1. Το M είναι το μέσον της AG. Επομένως έχει συντεταγμένες  $M\left(\frac{x_A+x_G}{2}, \frac{y_A+y_G}{2}\right)$  ή  $M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$  ή  $M(0,3)$ .  
 Αφού  $x_B \neq x_M$  ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda_{BM}$  της BM (ε) και είναι

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ2Θ(α)**

$$\lambda_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{3 - 1}{0 - 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Με χρήση των συντεταγμένων του Μ έχουμε

$$\varepsilon: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2y - 6 = -x \Leftrightarrow x + 2y = 6$$

- B2. i.** Οι συντεταγμένες του σημείου Δ προκύπτουν ως λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ε και ζ:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \cdot (-4) \begin{cases} -4x - 8y = -24 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -25 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 6 - 2 \cdot 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -4 \end{cases} \text{ Άρα } \Delta (-4, 5)$$

- ii. α' τρόπος:**

Από την υπόθεση έχουμε ότι  $\xi \parallel B\Gamma$ , που σημαίνει ότι  $A\Delta \parallel B\Gamma$ .

Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι είναι και  $AB \parallel \Delta\Gamma$ .

Αφού  $x_A \neq x_B$  και  $x_\Delta \neq x_\Gamma$  ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης των AB και ΔΓ και είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 1}{4 - (-1)} = 0$$

$$\lambda_{\Delta\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_\Delta}{x_\Gamma - x_\Delta} = \frac{5 - 5}{1 - (-4)} = 0.$$

Επομένως  $\lambda_{AB} = \lambda_{\Delta\Gamma}$  οπότε  $AB \parallel \Delta\Gamma$

- β' τρόπος:**

Οι συντεταγμένες του μέσου της ΒΔ είναι  $\left( \frac{x_B + x_\Delta}{2}, \frac{y_B + y_\Delta}{2} \right)$  ή

$$\left( \frac{4 + (-4)}{2}, \frac{1 + 5}{2} \right) = (0, 3).$$

Επομένως το μέσο της ΒΔ είναι το σημείο Μ(0,3).

Άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται.

Επομένως αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

- γ' τρόπος:**

(Για την παραλληλία των AB, ΔΓ)

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4 - (-1), 1 - 1) = (5, 0)$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta, y_\Gamma - y_\Delta) = (1 - (-4), 5 - 5) = (5, 0)$$

Άρα  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$  απ' όπου έπεται ότι  $AB \parallel \Delta\Gamma$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.Mλ2Θ(α)**

**B.3.** Έχουμε  $\lambda_{AB} = 0$  (B2,ii α' τρόπος). Επομένως η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα  $A(-1,1)$  και  $B(4,1)$  είναι η  $y=1$ , που αποτελεί την διευθετούσα της C. Γνωρίζουμε ότι (σχολικό βιβλίο σχήμα σελίδας 91) η διευθετούσα παραβολής C με τύπο  $x^2 = 2py$  είναι η  $y = -\frac{p}{2}$

Άρα έχουμε  $-\frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow p = -2$ .

Επίσης η εστία της E είναι  $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ . Άρα  $E(0, -1)$

**ΘΕΜΑ Γ**

Αρχικά έχουμε:  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| \in \mathbb{R}$  ως μέτρο γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων. Επίσης  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \in \mathbb{R}$  ως εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Επομένως η εξίσωση (1) είναι της μορφής  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A = |\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|$ ,  $B = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και  $\Gamma = -8$ .

Έστω ότι  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ . Τότε έχουμε:

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = 2 \cdot 4\sigma\upsilon\nu\omega = 8\sigma\upsilon\nu\omega$  (2)
- $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|^2 = (\vec{\beta} - 2\vec{\alpha})^2 = |\vec{\beta}|^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4|\vec{\alpha}|^2$  (από υπόθεση και λόγω της (2))  
 $= 16 - 32\sigma\upsilon\nu\omega + 16 = 32 - 32\sigma\upsilon\nu\omega = 32(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)$   
 Είναι πάντοτε  $\sigma\upsilon\nu\omega \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\omega \geq 0$  και το μέτρο διανύσματος μη αρνητικός αριθμός. Επομένως  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = \sqrt{32(1 - \sigma\upsilon\nu\omega)} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}$  (3)

**Γ1. α' τρόπος**

Για να παριστάνει η (1) ευθεία πρέπει και αρκεί  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| \neq 0$  ή  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ . Ισοδύναμα θα πρέπει οι αριθμοί  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|$  και  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  να μην είναι ταυτοχρόνως μηδέν.

Όμως:

- $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \underset{(3)}{\sigma\upsilon\nu\omega} = 1 \Leftrightarrow \omega = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Παρατηρούμε ότι για να είναι οι δύο αυτοί αριθμοί ταυτοχρόνως μηδέν θα πρέπει τα μη μηδενικά διανύσματα (αφού έχουν μη μηδενικά μέτρα)  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  να είναι ταυτοχρόνως ομόρροπα και κάθετα. Αφού αυτό αποκλείεται έπεται ότι οι δύο αριθμοί δεν μπορούν να είναι ταυτοχρόνως μηδέν, επομένως η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.Mλ2Θ(α)**

**β' τρόπος**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| \neq 0$  τότε η (1) παριστάνει ευθεία ανεξάρτητα από την τιμή του  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .
- Αν  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 0$  τότε από (3)  $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 1$ .

Τότε από (2) είναι:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 8 \neq 0$ . Αρά και σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία. (Επίσης είναι  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 0$  αν και μόνο αν  $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$ . Τότε όμως  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2 = 8 \neq 0$ )

**γ' τρόπος**

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$  τότε η (1) παριστάνει ευθεία ανεξάρτητα από την τιμή του  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}|$ .
- Αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$  τότε από (2)  $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 0$ .

Τότε από (3) είναι:  $|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 4\sqrt{2} \neq 0$ . Αρά και σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία

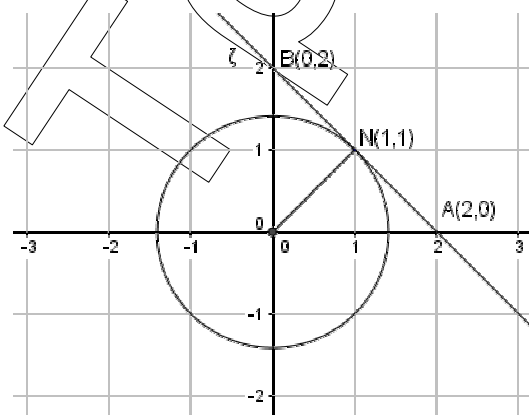
**Γ2.** Αν είναι  $\omega = 60^\circ$  τότε  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}$  οπότε από (3) έχουμε:

$$|\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

Επίσης από (2) έχουμε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

Τότε η (1) γίνεται  $4x + 4y - 8 = 0$  ή ζ:  $x + y - 2 = 0$

**Γ3.**



**α' τρόπος**

**α)** Αφού η ευθεία ζ εφάπτεται στον κύκλο C στο σημείο N η ευθεία ON που διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου και το σημείο N θα είναι κάθετη

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ2Θ(α)**

στην ζ. Άρα για τους συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_\zeta$  και  $\lambda_{ON}$  των παραπάνω ευθειών αντιστοίχως θα ισχύει:  $\lambda_\zeta \cdot \lambda_{ON} = -1$ . Όμως  $\lambda_\zeta = -1$ , άρα  $-1 \cdot \lambda_{ON} = -1$  ή  $\lambda_{ON} = 1$ . Αφού η ευθεία  $ON$  διέρχεται από το  $O(0,0)$  θα έχει εξίσωση:  $y - 0 = 1(x - 0)$  ή  $y = x$ . Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ζ και  $ON$  έχουμε τις συντεταγμένες του  $N, N(1, 1)$

**β)** Ο κύκλος  $C$  έχει κέντρο την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = |\overline{ON}|$ . Όμως  $\overline{ON} = (1 - 0, 1 - 0) = (1,1)$  και άρα  $|\overline{ON}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ . Έτσι τελικά είναι  $C: x^2 + y^2 = \sqrt{2}^2$  ή  $x^2 + y^2 = 2$ . Η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $C$  μπορεί να βρεθεί και ως η απόσταση του  $O(0,0)$  από την ευθεία ζ:

$$\rho = d(O, \zeta) = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

**β' τρόπος**

Έστω  $\rho > 0$  η ακτίνα του κύκλου. Αφού το κέντρο του κύκλου είναι το  $O(0,0)$  η εξίσωση του θα είναι  $x^2 + y^2 = \rho^2$  (4).

Η ευθεία ζ εφάπτεται σε αυτόν. Επομένως οι  $C$  και ζ έχουν μοναδικό κοινό σημείο και άρα το σύστημα των εξισώσεων (4) και της ζ έχει μοναδική λύση.

Από την εξίσωση της ζ έχουμε  $y = -x + 2$

Επομένως (4)  $\Rightarrow x^2 + (-x + 2)^2 = \rho^2 \Rightarrow$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - \rho^2 = 0 \text{ ή } 2x^2 - 4x + 4 - \rho^2 = 0 \text{ (5)}$$

Για να έχει η εξίσωση αυτή μία διπλή ρίζα απαιτούμε η διακρίνουσα να είναι μηδέν.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (4 - \rho^2) = 0 \Rightarrow 16 - 32 + 8\rho^2 = 0 \Rightarrow 8\rho^2 = 16 \text{ ή}$$

$$\rho^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}.$$

Επομένως η εξίσωση του κύκλου είναι  $x^2 + y^2 = 2$

Για  $\rho^2 = 2$  έχουμε (5)  $\Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$  ή  $x^2 - 2x + 1 = 0$

ή  $(x - 1)^2 = 0$  οπότε  $x=1$  που είναι η τετμημένη του σημείου  $N$ .

Για  $x = 1$  η εξίσωση της ευθείας ζ δίνει  $y = 1$ . Επομένως  $N(1, 1)$

**γ' τρόπος**

Έστω  $N(x_1, y_1)$  το σημείο επαφής του κύκλου  $C$  με την ευθεία ζ. Ο κύκλος  $C$  με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Επομένως η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο  $N$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ . Αυτή σύμφωνα με την υπόθεση ταυτίζεται με την  $x + y = 2$ .

Επομένως ισχύει:  $\frac{x_1}{1} = \frac{y_1}{1} = \frac{\rho^2}{2}$ . Από αυτήν προκύπτει ότι ( $y_1 = x_1$  και  $\rho^2 = 2x_1$ ) (6). Αφού το  $N$  ανήκει και στον κύκλο  $C$  οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωσή του. Επομένως:

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 \Rightarrow x_1^2 + x_1^2 = 2x_1 \Rightarrow 2x_1^2 - 2x_1 = 0 \text{ ή } x_1(x_1 - 1) = 0.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ2Θ(α)**

Άρα  $x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$  ή  $x_1 = 0$  που απορρίπτεται αφού στην περίπτωση αυτή από την (6) θα ήταν  $y_1 = 0$  οπότε  $N(0, 0)$  που δεν ανήκει στην ευθεία  $\zeta$ . (Επίσης στην περίπτωση αυτή ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο)

Για  $x_1 = 1$  είναι (6)  $\Rightarrow y_1 = 1$  και  $\rho^2 = 2$ .  
 Επομένως είναι  $N(1,1)$  και  $C: x^2 + y^2 = 2$

**δ' τρόπος**

Η ευθεία  $\zeta: x + y - 2 = 0$ , τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  στα σημεία  $A(2,0)$  και  $B(0,2)$  αντίστοιχα όπως προκύπτει από την εξίσωση της  $\zeta$  για  $y = 0$  και  $x = 0$  αντίστοιχα. Επομένως το τρίγωνο  $OAB$  είναι ισοσκελές με  $OA = OB = 2$  και υποτείνουσα την  $AB$ . Έτσι η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι και ύψος, (7). Αφού η ευθεία  $\zeta$  εφάπτεται στον κύκλο  $C$  στο σημείο  $N$  η ακτίνα  $ON$  είναι κάθετη στη  $\zeta$ . Έτσι το  $ON$  είναι το ύψος του τριγώνου  $OAB$  προς την υποτείνουσα  $AB$ . Λόγω της (7) θα είναι και διάμεσος. Επομένως το  $N$  είναι το μέσο του  $AB$ . Άρα  $N = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$  ή  $N(1,1)$ .

Η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου είναι η απόσταση των σημείων  $O(0,0)$  και  $N(1,1)$ .

Άρα  $\rho = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

Επομένως  $C: x^2 + y^2 = 2$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. α)**

- Οι  $KM, KP$  είναι ακτίνες του κυκλικού σύρματος, επομένως  $|\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{KP}| = 1$ . Έτσι έχουμε:  $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KP} = |\overrightarrow{KM}| \cdot |\overrightarrow{KP}| \cdot \text{συν}(\widehat{MKP})$  ή  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \text{συν}(\widehat{MKP})$  από όπου προκύπτει ότι  $\widehat{MKP} = 45^\circ$  (είναι  $0^\circ \leq \widehat{MKP} \leq 180^\circ$  ως γωνία διανυσμάτων).
- Το σημείο  $M$  είναι το μοναδικό κοινό σημείο του κύκλου με την  $\varepsilon$ . Άρα η  $\varepsilon$  είναι εφαπτομένη αυτού του κύκλου. Επομένως  $\widehat{KML} = 90^\circ$ . Έτσι το τρίγωνο  $KML$  είναι ορθογώνιο και έχει μία οξεία γωνία την  $\widehat{MKP} = 45^\circ$ . Άρα θα είναι και  $\widehat{KLM} = 45^\circ$  (Άθροισμα γωνιών τριγώνου  $180^\circ$ ).
- Είναι  $\overrightarrow{KP} // Ox$ , άρα  $KL // Ox$  επομένως θα είναι  $\widehat{OAz} = \widehat{KLM} = 45^\circ$  (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων ευθειών  $KL, Ox$  που τέμνονται από την  $Az$ ).

**β)** Η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $A$  που έχει τετμημένη  $9 + \sqrt{2}$  και τεταγμένη  $0$  αφού είναι σημείο του ημιάξονα  $Ox$ . Άρα είναι  $A(9 + \sqrt{2}, 0)$ .



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ2Θ(α)**

Άρα  $K\Lambda = \sqrt{2}$ . Έστω  $K', \Lambda'$  οι προβολές των  $K, \Lambda$  στον ημιάξονα  $Ox$ . Τότε λόγω του ορθογώνιου παραλληλογράμμου  $K\Lambda\Lambda'K'$  είναι:  $K'\Lambda' = K\Lambda = \sqrt{2}$ . Επίσης το τρίγωνο  $\Lambda\Lambda'A$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού  $\Lambda' = 90^\circ$  και  $O\hat{A}z = 45^\circ$  άρα και  $A\hat{\Lambda}\Lambda' = 45^\circ$ . Έτσι είναι  $\Lambda'A = \Lambda\Lambda' = KK' = 1$  (Από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $K\Lambda\Lambda'K'$  είναι  $\Lambda\Lambda' = KK' = \rho = 1$ )  
Επομένως  $K'A = K'\Lambda' + \Lambda'A = \sqrt{2} + 1$ . Έτσι τελικά έχουμε:  $x_K = x_{K'} = OK' = OA - K'A = (9 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + 1) = 8$

**Δ2.** Η τετμημένη του σημείου  $B$  είναι 1 αφού στην αρχική του θέση το κυκλικό σύρμα εφάπτεται στον ημιάξονα  $Oy$ . Η τετμημένη του σημείου  $K$  είναι 8 όπως δείξαμε στο Δ1. γ) Σύμφωνα με την παρατήρηση (1) (Δ1, γ, α' τρόπος), για τις συντεταγμένες των κέντρων των κύκλων αυτής της οικογένειας που είναι  $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$  ισχύουν:

α) Για την τεταγμένη:  $-\frac{B}{2} = 1 \Leftrightarrow B = -2$

β) Για την τετμημένη:  $1 \leq -\frac{A}{2} \leq 8 \Leftrightarrow 2 \leq -A \leq 16$

(Επειδή είναι όλοι θετικοί)  $\Leftrightarrow 4 \leq A^2 \leq 256$  (2)

Ακόμα έχουμε:  $2 \leq -A \Leftrightarrow A \leq -2 < 0$ . Άρα  $A < 0$  (3)

Επίσης για την ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$ , όλων των κύκλων της οικογένειας

ισχύει:  $\rho = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + 4 - 4\Gamma} = 2$

Επομένως  $A^2 + 4 - 4\Gamma = 4$  ή  $A^2 - 4\Gamma = 0 \Leftrightarrow A^2 = 4\Gamma$  (4) με  $4\Gamma > 0$ , αφού ισούται με τετράγωνο μη μηδενικού αριθμού όπως φαίνεται από την (3) και έτσι τελικά είναι και  $\Gamma > 0$ . Έτσι από την (4) έχουμε:  $|A| = \sqrt{4\Gamma} \Leftrightarrow -A =$

$2\sqrt{\Gamma}$  ή  $A = -2\sqrt{\Gamma}$

γ) Τέλος η (2) λόγω της (4) δίνει:  $4 \leq 4\Gamma \leq 256 \Leftrightarrow 1 \leq \Gamma \leq 64$