Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α. Θεωρία: Θεώρημα 2(i) Σχολικό βιβλίο Σελ. 147

Β. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

Γ. Θεωρία.

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

α. Η έλλειψη έχει $\alpha = 5$, $\beta = 3$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4^2$, άρα $\gamma = 4$, οπότε είναι **Ε΄(–4, 0), Ε (4, 0)**

Η παραβολή έχει παράμετρο $p = 8$ και εστία $(\frac{p}{2}, 0) =$ **(4, 0)**

βi. Από τον τύπο $yy_1 = p(x + x_1)$ βρίσκουμε:

Για το Μ (4, 8): $8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow \mathbf{y = x + 4}$

Για το Μ (4, –8): $-8y = 8(x + 4) \Leftrightarrow \mathbf{y = -x - 4}$

βii. Είναι:

$\overrightarrow{E'M} = (4 + 4, 8 - 0) = (8, 8)$ [τύπος: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$]

και

$\overrightarrow{E'M'} = (4 + 4, -8 - 0) = (8, -8)$

οπότε: $\overrightarrow{E'M} \cdot \overrightarrow{E'M'} = 64 - 64 = 0$ [τύπος: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$]

β. iii. Είναι: $N\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{8+0}{2}\right)$ δηλαδή **Ν (0, 4)** [Συντεταγμένες μέσου]

και

$$\lambda_{EN} = \frac{4 - 0}{0 - 4} = -1 \qquad \left[\text{τύπος}: \lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2\right]$$

$$\lambda_{E'M'} = \frac{-8 - 0}{4 + 4} = -1$$

Έτσι, $\lambda_{EN} = \lambda_{E'M'} \Leftrightarrow EN // E'M'$

ΘΕΜΑ 3ο

αi. Είναι:

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}|\vec{\beta}|\right)^2} \qquad \left[\text{τύπος}: |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2+y^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 4 + \frac{|\vec{\beta}|}{5}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \sqrt{5} \qquad [\ |\vec{\beta}| \geq 0\ ]$$

αii. Είναι $\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$, $\vec{\beta} = (2, 1)$ και

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2 + 8 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \qquad [\text{τύπος}: \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2]$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 10$$

$$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 5$$

β. Από το (α) είναι $\vec{\alpha} = \mathbf{(1, 3)}$, $\vec{\beta} = \mathbf{(2, 1)}$

Έχουμε:

$$\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} = \frac{2+3}{\sqrt{10\cdot\sqrt{5}}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και επειδή

$$0 \leq (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) \leq \pi$$

προκύπτει

$$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}$$

γi. Αν $\vec{\alpha}_1 = \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}_1 // \vec{\beta}$ και επειδή $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε:

$$\vec{\alpha}_1 = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = (2\lambda, \lambda) \quad (1)$$

Ακόμα:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (\text{προβ}_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}_1\cdot\vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 = 4\lambda + \lambda \qquad\qquad [\text{ τύπος: } \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda = 1}$$

και η (1) δίνει:

$$\vec{\alpha}_1 = (2,\ 1) \ \Leftrightarrow\ \text{προβ}_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

γii. Η συνιστώσα που είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ είναι το $\vec{\alpha}_1 = \text{προβ}_{\vec{\beta}}\,\vec{\alpha} = \vec{\beta} = (2,\ 1)$.

Έστω $\vec{\alpha}_2$ η δεύτερη συνιστώσα. Έχουμε

$$\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}$$

οπότε:

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 \ \Leftrightarrow\ \vec{\alpha}_2 = (1,\ 3) - (2,\ 1) \ \Leftrightarrow\ \vec{\alpha}_2 = (-1,\ 2)$$

Ώστε, είναι: $\vec{\alpha}_1 = (2,\ 1) \,//\, \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2 = (-1,\ 2)$

ΘΕΜΑ 4$^{\underline{\text{Ο}}}$

Α. (Επαγωγή) Η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$, γιατί $3^1 > 1^2 + 1 \Leftrightarrow 3 > 2$.

Αν υποθέσουμε $3^\nu > \nu^2 + 1$ (2) για $\nu \geq 1$, αρκεί να δείξουμε ότι: $3^{\nu+1} > (\nu+1)^2 + 1$ (3)

Πράγματι

$$3^{\nu+1} = 3^\nu\cdot 3 \overset{(2)}{\succ} (\nu^2+1)\cdot 3 = (\nu^2 + 2\nu^2 + 1) + 2 \overset{\nu\geq 1}{\succ} (\nu^2 + 2\nu + 1) = (\nu+1)^2 + 1$$

Βα. Έχουμε: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 16\text{συν}^2\varphi + 16\text{ημ}^2\varphi - 4(4 - 3^\nu + \nu^2) > 0$

$$\Leftrightarrow 16(\text{συν}^2\varphi + \text{ημ}^2\varphi) - 16 + 4\cdot 3^\nu - 4\cdot\nu^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 16 + 4\cdot 3^\nu - 4\cdot\nu^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot(3^\nu - \nu^2) > 0 \qquad\qquad [\text{ Δηλαδή: } A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4(3^\nu - \nu^2)]$$

$$\Leftrightarrow 3^\nu > \nu^2 \qquad\qquad [\text{Από Α: } 3^\nu > \nu^2 + 1 \Rightarrow 3^\nu > \nu^2,\ \nu \geq 1]$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για ν = 0, και, άρα, από το Α, ισχύει για κάθε μη αρνητικό ακέραιο ν. Επομένως, η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε ν και κάθε φ, όπως αυτά ορίστηκαν.

Το κέντρο του κύκλου είναι το Κ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή **Κ (2συνφ, 2ημφ)**

και η ακτίνα του

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{4(3^\nu - \nu^2)}}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\rho = \sqrt{3^\nu - \nu^2}}$$

β. Έστω x, y οι συντεταγμένες του κέντρου. Έχουμε (από το B_α):

$$x = 2\sigma\upsilon\nu\varphi \quad \text{και} \quad y = 2\eta\mu\varphi \quad \text{με } \varphi \in [0, 2\pi)$$

άρα, ο γ.τ. του κέντρου είναι ο κύκλος $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ (παραμετρικές εξισώσεις κύκλου)

Γi. Αν υποθέσουμε

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \text{ και } \eta\mu\varphi = 0,$$

τότε

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow 0 = 1, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως, είναι συνφ ≠ 0 ή ημφ ≠ 0 και η (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi)$.

ii. Η ε εφάπτεται του κύκλου C αν και μόνον αν: d(K, ε) = ρ

Είναι

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2\sigma\upsilon\nu^2\phi + 2\eta\mu^2\phi - 1|}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\phi + \eta\mu^2\phi}} = \sqrt{3^\nu - \nu^2} \Leftrightarrow 1 = 3^\nu - \nu^2 \Leftrightarrow 3^\nu = \nu^2 + 1$$

Η τελευταία ισότητα, λόγω του Α, ισχύει μόνο όταν ν = 0.