



**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $\alpha, \beta$  ακέραιοι. Να αποδείξετε την ιδιότητα:

Αν  $\alpha|\beta$  και  $\beta|\alpha$ , τότε  $\alpha = \beta$  ή  $\alpha = -\beta$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

**B.** Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:

**α.** Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει η ισοδυναμία:  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**β.** Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**γ.** Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, σχηματίζουν ίσες γωνίες με τον άξονα  $x'x$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**δ.** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  είναι οι ευθείες  $y = \frac{\alpha}{\beta}x$  και

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**ε.** Το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $-92$  με το  $5$  είναι  $2$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  με

$$x_1 \neq x_2 \text{ έχει εξίσωση } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  και η παραβολή  $y^2 = 16x$ .

**α.** Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης και την εστία της παραβολής. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**β.** Έστω  $E', E$  οι εστίες της έλλειψης ( η  $E'$  να έχει αρνητική τετμημένη ).

i) Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής στα σημεία της  $M(4, 8)$  και  $M'(4, -8)$ , και να δείξετε ότι τέμνονται στο  $E'$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

ii) Να αποδείξετε ότι  $\overline{EM} \cdot \overline{E'M'} = 0$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

iii) Αν  $N$  είναι το μέσο του  $E'M$  να αποδείξετε ότι  $EN \perp E'M'$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν

$$\vec{\alpha} = (1, 8 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\beta} = (2, \frac{1}{\sqrt{5}} |\vec{\beta}|)$$

**α.** Να αποδείξετε ότι

i)  $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$ , **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

ii)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$  **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**β.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**γ. i)** Να αποδείξετε ότι  $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{\beta}$  **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ii) Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη με το  $\vec{\beta}$ . **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω ο μη αρνητικός ακέραιος  $n$  και ο πραγματικός αριθμός  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι  $3^n > n^2 + 1$  για κάθε  $n \geq 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**B.** Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 + y^2 - (4\sigma\upsilon\upsilon\varphi)x - (4\eta\mu\varphi)y + 4 = 3^n + n^2 = 0 \quad (1)$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο  $C$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Να γράψετε τις συντεταγμένες του κέντρου του  $C$ , και να βρείτε την ακτίνα του.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

**β.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του κέντρου του παραπάνω κύκλου.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

**γ.** Να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση (ε):  $(\sigma\upsilon\upsilon\varphi)x + (\eta\mu\varphi)y - 1 = 0$  παριστάνει ευθεία για κάθε  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

ii) Αν η ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται του κύκλου  $C$ , τότε  $n = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**