ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 10 Μαΐου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (βλέπε σχολικό σελ. 135)

Α2. Σχολικό σελίδα 97.

Α3. Για την $f(x)=\alpha^x$ έχουμε:

- πεδίο ορισμού το $A=\Re$
- σύνολο τιμών το $B=(0,+\infty)$.

Για την $g(x)=\log_\alpha x$, με $0<\alpha\neq 1$ έχουμε:

- πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$
- σύνολο τιμών το $B=\Re$

Α4.
α. ΛΑΘΟΣ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε $f(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x-1$

Β1. Αφού $-1\leq \sigma\upsilon\nu 2x\leq 1 \overset{2}{\Leftrightarrow}$

$-2\leq 2\sigma\upsilon\nu 2x\leq 2 \overset{-1}{\Leftrightarrow}$

$-3\leq 2\sigma\upsilon\nu 2x-1\leq 1 \Leftrightarrow$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq f(x)\leq f(0)$. Έτσι έχουμε $\boxed{\max f=1}$, $\boxed{\min f=-3}$.

Η περίοδος της f είναι $T = \dfrac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{T = \pi}$

Β2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$2x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{6},\ \kappa \in z}$

Αφού $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow$

$-\dfrac{\pi}{6} \le \kappa\pi \le \dfrac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{6} \le \kappa \le \dfrac{11}{6} \overset{\kappa\in z}{\Leftrightarrow}$

- $\kappa = 0 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\pi}{6}}$
- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{7\pi}{6}}$

Αφού $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa\pi - \dfrac{\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow$

$\dfrac{\pi}{6} \le \kappa\pi \le \dfrac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6} \le \kappa \le \dfrac{13}{6} \overset{\kappa\in z}{\Leftrightarrow}$

- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{5\pi}{6}}$
- $\kappa = 2 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{11\pi}{6}}$

Έτσι η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία: $A\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$, $B\left(\dfrac{7\pi}{6},0\right)$, $\Gamma\left(\dfrac{5\pi}{6},0\right)$ και $\Delta\left(\dfrac{11\pi}{6},0\right)$.

Β3. Υπολογίζουμε:

- $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} - 1 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$
- $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6} - 1 = 2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) - 1 = -2\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} - 1 = -2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \text{συν}\frac{\pi}{3} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \text{συν}\frac{\pi}{2} - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

Έτσι $K = \dfrac{(\sqrt{3}-1)\cdot(-\sqrt{3}-1)+0}{1-(-1)} = \dfrac{-(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} = \dfrac{-\left(\sqrt{3}^2 - 1^2\right)}{2} = \dfrac{-2}{2} = \boxed{-1}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- $P(-2) = 24 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta + \gamma = 24 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta + \gamma = 32 \ (1)$
- $P(0) = 8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 8}$
- $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1 \ (2)$

Έτσι $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix} \overset{\gamma=8}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l|l} 4\alpha - 2\beta = 24 & \\ \alpha + \beta = -9 & \cdot 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ 2\alpha + 2\beta = -18 \end{array}\right. + \left\{6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1\right.$

$(2) \Rightarrow 1 + \beta + 8 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -10}$

Γ2. **α)** Το πολυώνυμο γίνεται: $f(x) = x^3 + x^2 + 10x + 8$. Με το σχήμα Horner για $x = 1$ βρίσκουμε:

1	1	-10	8	x=1
	1	2	–8	
1	2	–8	0	

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ γίνεται $(x-1)(x^2 + 2x - 8) = 0$, επομένως $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 + 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -4$. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι -4 , 1 , 2.

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) < 0$.

Η ανίσωση $f(x) < 0$ αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2)$.

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2+2x-8		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Γ3. $\dfrac{x+4}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)+f(-x)-18}$ **(1)**

Είναι $f(-x)=(-x)^3+(-x)^2-10(-x)+8=-x^3+x^2+10x+8$, επομένως $f(x)+f(-x)-18=$

$=x^3+x^2-10x+8-x^3+x^2+10x+8-18=2x^2-2=2(x^2-1)$.

Πρέπει $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -4,1,2$ και $f(x)+f(-x)-18\neq 0 \Leftrightarrow 2(x^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$, επομένως συνολικά οι περιορισμοί είναι $x\neq -4,-1,1,2$ η ανίσωση **(1)** γίνεται:

$$\frac{x+4}{f(x)}-\frac{2}{f(x)+f(-x)-18}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3+x^2-10x+8}-\frac{2}{2(x^2-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+4)(x-1)(x-2)}-\frac{2}{2(x-1)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)(x-2)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)(x-2)\le 0$.

Είναι $x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$, $x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -1$, $x-2\le 0 \Leftrightarrow x\le 2$

x	$-\infty$		-4		-1		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Γ		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty,-4)\cup(-4,-1)\cup(1,2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Είναι $f(\ln x)=2^{\ln x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x}=2^{\ln x}-\frac{1}{2^{\ln x}}$, με $x>0$.

β) Πρέπει $x>0$ και $f(\ln x)>0$, οπότε $2^{\ln x}-\frac{1}{2^{\ln x}}>0 \Leftrightarrow \left(2^{\ln x}\right)^2-1>0$ (αφού είναι $2^{\ln x}>0$)

$\left(2^{\ln x}-1\right)\cdot\left(2^{\ln x}+1\right)>0$ και επειδή είναι $2^{\ln x}+1>0$ για κάθε $x>0$, τότε $2^{\ln x}-1>0 \Leftrightarrow 2^{\ln x}>1 \Leftrightarrow 2^{\ln x}>2^0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \Leftrightarrow x>1$.

Οι ανισώσεις $x>0$ και $x>1$ συναληθεύουν όταν $x\in(1,+\infty)$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $(1,+\infty)$.

Δ2. Είναι $h(x)=\ln\frac{3}{x}+\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)=$

$=\ln\frac{3}{x}+\ln\frac{x+1-1}{x+1}+\ln\frac{x+2-1}{x+2}+\ln\frac{2+x}{2}=$

$=\ln\frac{3}{x}+\ln\frac{x}{x+1}+\ln\frac{x+1}{x+2}+\ln\frac{x+2}{2}$.

Για $x>0$ είναι $\frac{3}{x}>0$, $\frac{x}{x+1}>0$, $\frac{x+1}{x+2}>0$, $\frac{x+2}{2}>0$,

οπότε $h(x)=\ln\left(\frac{3}{x}\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}$.

Δ3. Για $x>1$ έχουμε

$h(x)=g(x)$, $\ln\frac{3}{2}=\ln\left(f(\ln x)\right)\Leftrightarrow f(\ln x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{\ln x}-\frac{1}{2^{\ln x}}=\frac{3}{2}$.

Θέτουμε $2^{\ln x}=\omega>0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$\omega-\frac{1}{\omega}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\omega^2-3\omega-2=0\Leftrightarrow \omega=2$ ή $\omega=-\frac{1}{2}$

Η τιμή $\omega=-\frac{1}{2}$ απορρίπτεται γιατί $-\frac{1}{2}<0$, οπότε

$\omega=2$, $2^{\ln x}=2\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$.

Δ4. Είναι $f(1)=2^1-\frac{1}{2^1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $f(2)=2^2-\frac{1}{2^2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$, τότε

$$\eta\mu\theta=\frac{\frac{3}{2}\ln^2 x-2\cdot\frac{15}{4}\ln x}{6\cdot\frac{3}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta=\frac{\frac{3}{2}\ln^2 x-\frac{15}{2}\ln x}{9}\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\frac{\frac{3}{2}(\ln^2 x-5\ln x)}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\frac{\ln^2 x-5\ln x}{6}.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\le\eta\mu\theta\le 1$, οπότε $-1\le\frac{\ln^2 x-5\ln x}{6}\le 1\Leftrightarrow -6\le\ln^2 x-5\ln x\le 6$ με $x>0$ και έχουμε τις ανισώσεις:

$\ln^2 x-5\ln x\ge -6$ (1) και $\ln^2 x-5\ln x\le 6$ (2)

$(1):\ln^2 x-5\ln x+6\ge 0$, θέτουμε $\ln x=\omega$, οπότε $\omega^2-5\omega+6\ge 0$ Οι ρίζες του τριωνύμου $\omega^2-5\omega+6$ είναι οι $\omega=2$, $\omega=3$

ω	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$\omega^2-5\omega+6$		+	0	−	0	+	

Η ανίσωση $\omega^2-5\omega+6\ge 0$ αληθεύει όταν $\omega\le 2$ ή $\omega\ge 3$, οπότε $\ln x\le 2$ ή $\ln x\ge 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln x\le\ln e^2$ ή $\ln x\ge\ln e^3\Leftrightarrow x\le e^2$ ή $x\ge e^3$ και αφού πρέπει $x>0$ τότε $x\in(0,e^2]\cup[e^3,+\infty)$.

$(2):\ln^2 x-5\ln x-6\le 0$, θέτουμε $\ln x=\varphi$, οπότε $\varphi^2-5\varphi-6\le 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\varphi^2-5\varphi-6$ είναι οι $\varphi=-1$, $\varphi=6$

φ	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$\varphi^2-5\varphi-6$		+	0	−	0	+	

Η ανίσωση $\varphi^2-5\varphi-6\le 0$ αληθεύει όταν $-1\le\varphi\le 6$, οπότε $-1\le\ln x\le 6\Leftrightarrow$

$$\ln e^{-1}\le\ln x\le\ln e^6\Leftrightarrow\frac{1}{e}\le x\le e^6\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{e},e^6\right]$$

Οι ανισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν όταν $x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]\cup[e^3,e^6]$.