

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 175)

A2. α) Λάθος. [πχ. Αν $P(x) = -3x^3 + 4x^2 - 2$ (3^{ου} βαθμού) και $Q(x) = 3x^3 + 7x + 5$ (3^{ου} βαθμού), τότε είναι $P(x) + Q(x) = 4x^2 + 7x + 3$ (2^{ου} βαθμού)].

β) Λάθος. [πχ. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι $f(1) = 1 < 4 = f(2)$ αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για $-2 < -1$ είναι $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$].

γ) Σωστό. (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 44)

δ) Λάθος. (Ο $\log x$ δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές του x).

ε) Λάθος. [Είναι $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$].

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι: • $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$$\begin{aligned} \bullet \sin\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\left(\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta \end{aligned}$$

$$\bullet \sigma\varphi(\pi - \theta) = -\sigma\varphi\theta$$

$$\bullet \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\theta$$

$$\bullet \sin(\pi - \theta) = -\sin\theta$$

$$\bullet \eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\bullet \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta$$

$$\bullet \varepsilon\varphi(2\pi + \theta) = \varepsilon\varphi\theta$$

Επομένως, η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\varphi(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu(\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(2\pi + \theta)} =$$

$$= \frac{-(-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot (-\eta\mu\theta) \cdot (-\sigma\varphi\theta) \cdot \varepsilon\varphi\theta}{(-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot (-\eta\mu\theta) \cdot \sigma\varphi\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta} = 1$$

B2. Για τη συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$ έχουμε:

$$\bullet \max f = |2| = 2$$

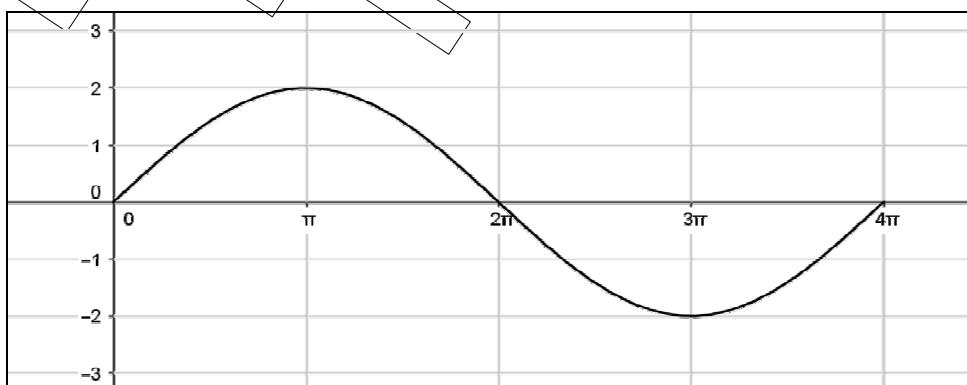
$$\bullet \min f = -|2| = -2$$

$$\bullet \text{περίοδος } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Ο πίνακας τιμών για το διάστημα μιας περιόδου $[0, 4\pi]$ είναι:

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\frac{x}{2}$	0	1	0	-1	0
$2 \cdot \eta\mu\frac{x}{2}$	0	2	0	-2	0

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $[0, 4\pi]$ είναι:



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

B3. $f(x) = A \Leftrightarrow 2 \cdot \eta\mu \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right), & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k\pi + \frac{\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

B4. Επειδή οι αριθμοί $\frac{5\pi}{4}$ και $\frac{11\pi}{6}$ ανήκουν στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει:

$$\frac{5\pi}{4} < \frac{11\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right) > f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^ο βαθμού θα πρέπει:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

- Για $\lambda = 1$ έχουμε $P(x) = x^2 - 7x + 6$, οπότε το $P(x)$ είναι 2^ο βαθμού και άρα η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται.
- Για $\lambda = -1$ έχουμε $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$, οπότε το $P(x)$ είναι 3^ο βαθμού και άρα η τιμή $\lambda = -1$ είναι δεκτή.

Για $\lambda = -1$

Γ2. Είναι $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$.

Θέλουμε να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$, οπότε αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $x = 1$ έχουμε:

2	-1	-7	6	$x = 1$
↓	2	1	-6	
2	1	-6	0	

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

Επομένως:

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=\frac{3}{2} \text{ ή } x=-2$$

οπότε, τα σημεία τομής είναι τα $A(1,0)$, $B(\frac{3}{2},0)$, $\Gamma(-2,0)$

Γ3. α) Αφού το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ θα ισχύει ότι:

$$Q(2)=0 \Leftrightarrow 8-4(\mu+1)+2(\mu-1)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$8-4\mu-4+2\mu-2+2=0 \Leftrightarrow -2\mu+4=0 \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$$

Για $\mu=2$ έχουμε $Q(x)=x^3-3x^2+x+2$, ενώ η διαίρεση του $Q(x)$ δια του $x+3$ γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+x+2 & x+3 \\ \hline -x^3-3x^2 & x^2-6x+19 \\ \hline -6x^2+x+2 & \\ \hline 6x^2+18x & 19x+2 \\ \hline 19x+2 & -19x-57 \\ \hline -19x-57 & -55 \\ \hline -55 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $Q(x) = (x+3)(x^2-6x+19) - 55$

β. $\frac{x^2-6x+19}{Q(x)+55} + \frac{2x^2+x-6}{P(x)} < 0 \quad (1)$

Από **Γ3.α)** έχουμε $Q(x) = (x+3)(x^2-6x+19) - 55$,

επομένως $Q(x)+55 = (x+3)(x^2-6x+19)$

Από **Γ2.** έχουμε $P(x) = (x-1)(2x^2+x-6)$

Πρέπει: $(x+3)(x^2-6x+19) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$, αφού $x^2-6x+19 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($\Delta < 0$)

Επίσης πρέπει $(x-1)(2x^2+x-6) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, -2, \frac{3}{2}$

Για $x \neq -3, -2, 1, \frac{3}{2}$ η ανίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{x^2-6x+19}{(x+3)(x^2-6x+19)} + \frac{2x^2+x-6}{(x-1)(2x^2+x-6)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{(x+3)(x-1)} + \frac{x+3}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1+x+3}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x+2}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x+3)(x-1)} < 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+3)(x-1) < 0$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2(x+1)$	-	-	-	0	+	+	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
Γινόμενο	-	+	+	0	-	+	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^x$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ όταν:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln \alpha} > 0 \\ \ln \alpha \neq 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln \alpha - 1}{\ln \alpha} > 0 \\ \ln \alpha \neq \ln 1 \\ \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \alpha (\ln \alpha - 1) > 0 \\ \alpha \neq 1 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

α	$-\infty$	0	1	e	$+\infty$
$\ln \alpha$			-	0	+
$\ln \alpha - 1$			-	-	0
$\ln \alpha (\ln \alpha - 1)$			+	-	0

Από τον παραπάνω πίνακα προσημούν έχουμε ότι: $\alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln \alpha} > 1 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\ln \alpha} > 0 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \alpha < 0 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha \in (0,1) \cup (e, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in (0,1)$$

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x) \cdot f(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^{-x} \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha}\right)^{-x+x} = 1$$

$$\text{Άρα, } f(-x) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Από την παραπάνω σχέση για } x = \frac{1}{2} \text{ έχουμε: } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Άρα,

$$f(e^x) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) > 1 \Leftrightarrow f(e^x) \cdot \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} > 1 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(e^x) > f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\stackrel{(f \nearrow)}{\Leftrightarrow} e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\ln 2$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

Δ3. α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \log_3 81 + \log_3 15 - \log_3 5 - e^{\frac{1}{2} \ln 9} + e^{-\frac{\ln 2}{\ln 4}} \\ &= \log_3 81^{\frac{1}{2}} + \log_3 \frac{15}{5} - e^{\frac{1}{2} \ln 9} + e^{-\frac{\ln 2}{\ln 2^2}} = \log_3 \sqrt{81} + \log_3 3 - \sqrt{9} + e^{-\frac{\ln 2}{2 \ln 2}} \\ &= \log_3 9 + 1 - 3 + e^{-\frac{1}{2}} = 2 - 2 + e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Άρα,

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln e^{-\frac{1}{2}}} \right)^x = \left(1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}} \right)^x = (1+2)^x = 3^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β)

α' τρόπος

Έχουμε

$$\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(2x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^x + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} < 1 + \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^x \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^x - 1 < 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2} \right)^x = \omega > 0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$2\omega^2 - \omega - 1 < 0 \stackrel{\omega > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \omega < 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{2} \right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x < \left(\frac{3}{2} \right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

β' τρόπος

Έχουμε

$$\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(2x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2 < \frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 > 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \omega > 0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + \omega - 2 > 0 \stackrel{\omega > 0}{\Leftrightarrow} \omega > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

γ' τρόπος

Έχουμε

$$\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(2x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} < \frac{2^{2x}}{2^x \cdot 3^x} + \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 3^x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} < 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 < 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \omega > 0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$2\omega^2 - \omega - 1 < 0 \stackrel{\omega > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \omega < 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

δ' τρόπος

Έχουμε $\ln 2 + \ln(f(2x)) < x \ln 2 + \ln(2^x + f(x))$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot f(x)) < \ln 2^x + \ln(2^x + f(x))$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 \cdot 3^{2x}) < \ln(2^x \cdot (2^x + 3^x))$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 3^{2x} - 3^{2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} - 3^{2x}) + (2^x \cdot 3^x - 3^{2x}) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3^x)(2^x + 3^x) + 3^x(2^x - 3^x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3^x)(2^x + 2 \cdot 3^x) > 0$$

$$2^x + 2 \cdot 3^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \nearrow$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

γ) Έχουμε: $(2 + \sqrt{f(1)})(2 - \sqrt{f(1)}) = 2^2 - \sqrt{f(1)}^2 = 4 - f(1) = 4 - 3 = 1$

οπότε, $2 - \sqrt{f(1)} = \frac{1}{2 + \sqrt{f(1)}}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$(2 + \sqrt{f(1)})^x + (2 - \sqrt{f(1)})^x = 4 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{f(1)})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{f(1)})^x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \sqrt{f(1)})^{2x} + 1 = 4(2 + \sqrt{f(1)})^x \stackrel{(f(1)=3)}{\Leftrightarrow} ((2 + \sqrt{3})^x)^2 - 4(2 + \sqrt{3})^x + 1 = 0$$

Θέτουμε $(2 + \sqrt{3})^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(y = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} \quad \text{ή} \quad y = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad y = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^1 \quad \text{ή} \quad (2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ