



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A.1.** Θεώρημα βλ. Βιβλίο ΟΕΔΒ Άλγεβρα Β' Λυκείου σελ. 74
A.2. Θεωρία σελ. 136
A.3. Θεωρία σελ. 124,125
- A.4.** α. Β
 β. Γ
 γ. Β
- A.5.** α. Σωστό
 β. Λάθος
 γ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

- B.1.** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Επειδή τα σημεία $A(0, \beta + 5)$, και $B\left(\frac{4\pi}{\beta}, 4\beta^2\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχουμε:

$$f(0) = \beta + 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \text{συν} 0 = \beta + 5 \Leftrightarrow \alpha = \beta + 5 \quad (1)$$

$$f\left(\frac{4\pi}{\beta}\right) = 4\beta^2 \Leftrightarrow \alpha \cdot \text{συν}\left(\frac{\beta \cdot 4\pi}{2 \cdot \beta}\right) = 4\beta^2 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$4\beta^2 = \beta + 5 \Leftrightarrow 4\beta^2 - \beta - 5 = 0 \text{ και } \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5) = 81$$

$$\text{Άρα } \beta = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8} = \begin{cases} \beta = -1 & \text{δεκτή } (\beta < 0) \\ \beta = \frac{5}{4} & \text{(απορ.)} \end{cases}$$

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε $\alpha = 4$

Άρα το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) έχει λύση $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι

$$f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)}$$

B.2. Έχουμε : $f(x) = 4 \Leftrightarrow 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} = 4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \Leftrightarrow x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Αλλά $0 \leq x \leq 12\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4k\pi \leq 12\pi \Leftrightarrow \boxed{0 \leq k \leq 3}$. Άρα $k=0,1,2,3$

Για $k=0$ $x_1 = 0$

Για $k=1$ $x_2 = 4\pi$

Για $k=2$ $x_3 = 8\pi$

Για $k=3$ $x_4 = 12\pi$

Άρα τα σημεία τομής της f με την ευθεία $y=3$ είναι $(0,4)$, $(4\pi,4)$, $(8\pi,4)$, $(12\pi,4)$.

B.3. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)$ και είναι της μορφής

$f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 4 και η ελάχιστη τιμή της το -4.

Η περίοδος της είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

B.4. Έχουμε

$$A = f(4\pi) - f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi) - 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Ακόμα $f(0) = 4 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 4$ οπότε

$$B = 3 \cdot f(0) \cdot \frac{f(0)^{2010} - 1}{f(0) - 1} + 4 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{4^{2010} - 1}{4 - 1} + 4 =$$

$$3 \cdot 4 \cdot \frac{4^{2010} - 1}{3} + 4 = 4(4^{2010} - 1) + 4 = \boxed{4^{2011}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Έχουμε $P(1)=1$ και $P(-2)=10$

$$P(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + \alpha - 7 + \beta + 2 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

$$P(-2) = 10 \Leftrightarrow 16 - 8\alpha - 28 - 2\beta + 2 = 10 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = -10$$

Επομένως έχουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 5 \\ 4\alpha + \beta = -10 \end{array} \right\} \text{ που έχει λύση } \alpha = -5 \text{ και } \beta = 10.$$

Γ.2. α. Για $\alpha = -5$ και $\beta = 10$ έχουμε $P(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 10x + 2$.
Τότε:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 10x + 2 & x^3 + x^2 - 2x \\ \hline -x^4 - x^3 + 2x^2 & x - 6 \\ \hline -6x^3 - 5x^2 + 10x + 2 & \\ \hline 6x^3 + 6x^2 - 12x & \\ \hline x^2 - 2x + 2 & \end{array}$$

Άρα το πηλίκο είναι $\Pi(x) = x - 6$.

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε

$$P(x) = (x^3 + x^2 - 2x)\Pi(x) + \upsilon(x)$$

$$\text{Επομένως } P(x) = (x^3 + x^2 - 2x)(x - 6) + x^2 - 2x + 2.$$

β. Έχουμε:

$$P(x) = \upsilon(x) \Leftrightarrow (x^3 + x^2 - 2x)\Pi(x) + \upsilon(x) = \upsilon(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^3 + x^2 - 2x)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x(x - 6)(x - 1)(x + 2) = 0$$

Άρα οι λύσεις είναι $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$ και $x = 6$

γ. Έχουμε:

$$Q(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) > 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 2) > 0$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
x	-	0	-	+	+
x-1	-	-	0	-	+
x+2	-	0	+	+	+
x(x-1)(x+2)	-	0	+	0	+

Επομένως $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $\frac{4-x}{4+x} > 0$ και $4+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$.

$$\frac{4-x}{4+x} > 0 \Leftrightarrow (4-x)(4+x) > 0 \text{ \textit{οπότε} } x \in (-4, 4)$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = (-4, 4)$.

Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων αρκεί $f(0)=0$, έτσι για $x=0$ έχουμε:

$$f(0) = \ln\left(\frac{4-0}{4+0}\right) = \ln(1) = 0.$$

Δ2. $A = f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) =$
 $= \ln 7 + \ln 3 + \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \ln(1) + \ln\left(\frac{3}{5}\right) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{7}\right) =$
 $= \ln\left(7 \cdot \frac{1}{7}\right) + \ln\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) = \ln(1) + \ln(1) + \ln(1) = 0$

Δ3. Η ανίσωση γίνεται:

$$f(x) - f(-x) < 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) - \ln\left(\frac{4+x}{4-x}\right) < 2\ln 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) - \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{-1} < 2\ln 3^{-1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) + \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) < 2\ln 3^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) < 2\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

(η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα)

$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(2-x)}{3(4+x)} < 0 \Leftrightarrow (2-x)(4+x) < 0$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$(2-x)(4+x)$		-	+	-

Άρα $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f = (-4, 4)$ οπότε τελικά $x \in (2, 4)$

Δ4. Η εξίσωση γίνεται

$$e^{2f(x)} + 3 = 4e^{f(x)} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2 - 4e^{f(x)} + 3 = 0$$

Θέτουμε $y = e^{f(x)}$ με $y > 0$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται

$y^2 - 4y + 3 = 0$ που έχει ρίζες τις $y=1$ και $y=3$

- Για $y=1$ έχουμε

$$1 = e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} = 1 \Leftrightarrow 4-x = 4+x \Leftrightarrow x=0$$

που γίνεται δεκτή γιατί $0 \in A_f$.

- Για $y=3$ έχουμε

$$3 = e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)} = 3 \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4-x = 12+3x \Leftrightarrow x = -2 \text{ που γίνεται δεκτή γιατί } -2 \in A_f .$$

Άρα οι λύσεις είναι $x=0$ και $x=-2$.