



Β' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Θεωρία βλ. Βιβλίο ΟΕΔΒ Άλγεβρα Β' Λυκείου σελ. 28.

A.2. Θεωρία σελ. 95, 96.

- B.1.**
1. Σωστό
 2. Σωστό
 3. Λάθος
 4. Σωστό
 5. Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

Έχουμε $P(-3) = -8$ και $P(-2) = 0$

- α)**
- $P(-3) = -8 \Leftrightarrow (-3)^3 + \alpha \cdot (-3)^2 - (-3) + \beta = -8 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 16$
 - $P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 + \alpha \cdot (-2)^2 - (-2) + \beta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = 6$

Επομένως έχουμε το σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 9\alpha + \beta = 16 \\ 4\alpha + \beta = 6 \end{array} \right\} \text{ που έχει λύση } \alpha = 2 \text{ και } \beta = -2.$$

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -2$ το πολυώνυμο γίνεται

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Έτσι έχουμε

$x^3 + 2x^2 - x - 2$	$x^2 + x - 1$
$-x^3 - x^2 + x$	$x + 1$
$x^2 + 0 \cdot x - 2$	
$-x^2 - x + 1$	
$-x - 1$	

Άρα $\Pi(x) = x + 1$ και $\nu(x) = -x - 1$.

Επομένως $P(x) = (x^2 + x - 1)(x + 1) - x - 1$.

γ) $P(x) = Q(x) - 1 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x + 1) - x - 1 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x + 1) - x - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)(x + 1) - x - (x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)x - x = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)x = 0$
 άρα οι λύσεις είναι $x = 0$, $x = -2$ και $x = 1$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. α) Η εξίσωση (1) γίνεται

$$\eta\mu 2x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή } \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Οι λύσεις είναι

- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

β) Για κάθε $x \in [0, \pi]$ έχουμε

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{1}{4}.$$

Άρα $\kappa = 0$. Τότε $x = \frac{\pi}{2}$

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4}.$$

Άρα ο κ δεν ορίζεται

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq 2\kappa\pi \leq \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq \kappa \leq \frac{3}{8}.$$

Άρα $\kappa = 0$. Τότε $x = \frac{\pi}{4}$

$$0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq 2\kappa\pi \leq \pi - \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq \kappa \leq \frac{1}{8}.$$

Άρα $\kappa = 0$. Τότε $x = \frac{3\pi}{4}$

Δηλαδή οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ και $x_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Ακόμα $x_1 + x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2x_2$ που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

$$\begin{aligned}
 \text{B. } \frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha} &= \frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-1} = \\
 &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2}{2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+2} = \frac{(2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-1)^2-2(2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-1)+1}{(2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-1)^2+2(2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-1)+1} = \\
 &= \frac{4\sigma\upsilon\nu^4 \alpha-4\sigma\upsilon\nu^2 \alpha+1-4\sigma\upsilon\nu^2 \alpha+2+1}{4\sigma\upsilon\nu^4 \alpha-4\sigma\upsilon\nu^2 \alpha+1+4\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-2+1} = \frac{(2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-2)^4}{4\sigma\upsilon\nu^4 \alpha} = \\
 &= \frac{(2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha-2)^4}{4\sigma\upsilon\nu^4 \alpha} = \frac{(-2\eta\mu^2 \alpha)^2}{4\sigma\upsilon\nu^4 \alpha} = \frac{4\eta\mu^4 \alpha}{4\sigma\upsilon\nu^4 \alpha} = \varepsilon\varphi^4 \alpha
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. i. Έχουμε :

$$\begin{aligned}
 L &= \varphi(2) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(4) \cdot \dots \cdot \varphi(63) + 2004 = \\
 &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 4}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 5}{\ln 4} \cdot \dots \cdot \frac{\ln 64}{\ln 63} + 2004 = \\
 &= \frac{\ln 64}{\ln 2} + 2004 = \frac{\ln 2^6}{\ln 2} + 2004 = \frac{6 \cdot \ln 2}{\ln 2} + 2004 = 6 + 2004 = 2010.
 \end{aligned}$$

ii. Έχουμε :

$$\varphi(x) > \varphi(x^2) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln x} > \frac{\ln(x^2+1)}{\ln x^2} \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{\ln x} > \frac{\ln(x^2+1)}{2\ln x}$$

Επειδή για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$ έχουμε

$$\frac{\ln(x+1)}{1} > \frac{\ln(x^2+1)}{2} \Leftrightarrow 2\ln(x+1) > \ln(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1)^2 > \ln(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 > x^2+1 \Leftrightarrow x^2+2x+1 > x^2+1 \Leftrightarrow x > 0$$

Αλλά $x > 1$. Επομένως η λύση είναι $x > 1$.

B. i. Πρέπει

$$e^{2x} - (e+1)e^x + e > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e \cdot e^x - e^x + e > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x(e^x - e) - (e^x - e) > 0 \Leftrightarrow (e^x - e) \cdot (e^x - 1) > 0.$$

Θέτω $e^x = y > 0$. Τότε

$$(y - e)(y - 1) > 0$$



$$y > e \quad \text{ή} \quad 0 < y < 1. \text{ Επειδή } x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow y > 1.$$

Άρα ισχύει μόνο $e^x > e \Leftrightarrow x > 1$

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x \in (1, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x > e \Leftrightarrow \ln x > 1$ επομένως έχουμε

$$f(\ln x) = \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(e^{2\ln x} - (e-1)e^{\ln x} + e) = \ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x^2} - (e-1)e^{\ln x} + e = (x-1) \Leftrightarrow x^2 - (e-1)x + e = x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - e \cdot x - x + e - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x-e) - (x-e) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-e)(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x-e-1) = 0$$

Οι λύσεις είναι

$$x = 1 \quad (\text{Απορρίπτεται αφού } x > e) \quad \text{και}$$

$$x = e+1 \quad (\text{Δεκτή})$$