ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α)** Λάθος (βλέπε σελίδα 54 του σχολικού βιβλίου, Το σωστό είναι α, β, ομόσημοι τότε $\alpha\cdot\beta>0$).

β) Σωστό (βλέπε σελίδα 63 του σχολικού βιβλίου).

γ) Λάθος (βλέπε σελίδα 161 του σχολικού βιβλίου. Το σωστό είναι ότι $y=x$).

δ) Σωστό (βλέπε σελίδα 72 του σχολικού βιβλίου).

ε) Σωστό (βλέπε σελίδα 64 του σχολικού βιβλίου).

Α2. Βλέπε απόδειξη (1) στη σελίδα 71 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων B και B' είναι:

$$P(B')=1-P(B)\Leftrightarrow P(B)=1-P(B')\Leftrightarrow P(B)=1-\frac{2}{3}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{3}.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}&P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)\\ \Leftrightarrow\ &P(A\cap B)=P(A)-P(A-B)\\ \Leftrightarrow\ &P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \Leftrightarrow\ &P(A\cap B)=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\\ \Leftrightarrow\ &P(A\cap B)=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Β2. Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων για τα ενδεχόμενα Α, Β ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{4}{6}$$
$$\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{2}{3}.$$

Β3. Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας για ενδεχόμενο B ισχύει:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}=\frac{40}{N(\Omega)}$$
$$\Leftrightarrow N(\Omega)=120$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση γίνεται:

$$(\alpha_1-1)^3=8$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1-1=\sqrt[3]{8}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1-1=2$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1=3$$

Επειδή

$$\alpha_6=13$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1+(6-1)\cdot\omega=13$$
$$\Leftrightarrow 3+5\cdot\omega=13$$
$$\Leftrightarrow 5\cdot\omega=13-3$$
$$\Leftrightarrow 5\cdot\omega=10$$
$$\Leftrightarrow \omega=2$$

Γ2. Το άθροισμα των ν – πρώτων όρων αριθμητικής προόδου είναι: $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\cdot\alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega\right]$

Επειδή $\alpha_1 = 3$, $\omega = 2$ και θέλουμε $S_\nu > 440$, έχουμε:

$$S_\nu > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot\left[2\cdot3+(\nu-1)\cdot2\right] > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot(6+2\nu-2) > 440$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot(2\nu+4) > 440$$

$$\Leftrightarrow \nu^2+2\nu > 440$$

$$\Leftrightarrow \nu^2+2\nu-440 > 0$$

Η Διακρίνουσα του τριωνύμου είναι Δ= 4 – 4·1(–440)= 4+1760=1764

Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες:

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\pm\sqrt{1764}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm42}{2}$$

$$\nu_1 = \frac{-2+42}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ και}$$

$$\nu_2 = \frac{-2-42}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Επειδή ο ν είναι θετικός ακέραιος, δεκτή λύση είναι η $\nu_1 = 20$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

ν	**0**		**20**		**+∞**
$\nu^2+2\nu-440$	‖	−	0	+	

Οπότε πρέπει ν > 20.

Άρα το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, που απαιτούνται, ώστε το άθροισμά τους να ξεπερνά το 440 είναι $\nu = 21$.

Γ3. Επειδή οι αριθμοί $\alpha_2 - x^2$, $\alpha_3 - x^2$, $\alpha_5 - 2x^2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, ο αριθμός $\alpha_3 - x^2$ είναι γεωμετρικός μέσος, οπότε ισχύει:

$$\left(\alpha_3 - x^2\right)^2 = \left(\alpha_2 - x^2\right)\cdot\left(\alpha_5 - 2x^2\right) \quad (1)$$

Οι αριθμοί α_2, α_3, α_5 είναι όροι της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος **Γ1** με

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \alpha_2 = 3+2 \Leftrightarrow \alpha_2 = 5$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow \alpha_2 = 3+4 \Leftrightarrow \alpha_2 = 7$$

$$\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega \Leftrightarrow \alpha_5 = 3+8 \Leftrightarrow \alpha_5 = 11$$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\left(7-x^2\right)^2=\left(5-x^2\right)\cdot\left(11-2x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 49-14x^2+x^4=55-10x^2-11x^2+2x^4$$
$$\Leftrightarrow x^4-7x^2+6=0 \text{ (Διτετράγωνη)}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-7x^2+6=0$$

Θέτουμε $x^2=\omega$ με $\omega\geq 0$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $\omega^2-7\omega+6=0$
Το τριώνυμο έχει: $\alpha=1$, $\beta=-7$, $\gamma=6$. Η διακρίνουσά του είναι: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-7\right)^2-4\cdot1\cdot6=49-24=25$.

Οι ρίζες του είναι: $\omega_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm5}{2}$

δηλαδή: $\omega_1=\dfrac{7+5}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ και $\omega_2=\dfrac{7-5}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

Η εξίσωση $x^2=\omega$ για $\omega=1$ γίνεται: $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1}\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$
Η εξίσωση $x^2=\omega$ για $\omega=6$ γίνεται:
$x^2=6\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}\Leftrightarrow x=\sqrt{6}$ ή $x=-\sqrt{6}$

Οι ακέραιες τιμές του x είναι το 1 και το -1.
Για $x=1$ οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2-x^2=5-1=4$$
$$\alpha_3-x^2=7-1=6$$
$$\alpha_5-2x^2=11-2=9$$

Για $x=-1$ οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2-x^2=5-\left(-1\right)^2=5-1=4$$
$$\alpha_3-x^2=7-\left(-1\right)^2=7-1=6$$
$$\alpha_5-2x^2=11-2\cdot\left(-1\right)^2=11-2=9$$

Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\lambda=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Για $x=\pm\sqrt{6}$ οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$\alpha_2-x^2=5-6=-1$$
$$\alpha_3-x^2=7-6=1$$
$$\alpha_5-2x^2=11-2\cdot6=-1$$

Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = \frac{1}{-1} = -1$ που απορρίπτεται γιατί $\lambda \neq -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = (-\Delta)^2 - 4\cdot 1\cdot \Delta$$
$$\Leftrightarrow \Delta = \Delta^2 - 4\Delta$$
$$\Leftrightarrow \Delta^2 - 5\Delta = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta\cdot(\Delta - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \text{ ή } \Delta = 5$$

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) έχουμε:

- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, την $x = 0$.
- Αν $\Delta = 5$, η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Δ2. Για $\Delta = 5$ η εξίσωση (1) γίνεται: $x^2 - 5x + 5 = 0$

α) Από τους τύπους του Vieta γνωρίζουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{1} = 5 \text{ και } x_1\cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 5$$

Έτσι ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2\cdot 5\cdot x + 5\cdot 5}$$
$$\Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$$
$$\Leftrightarrow g(x) = \sqrt{(x-5)^2}$$
$$\Leftrightarrow g(x) = |x-5|$$

β) Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f πρέπει: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{1\}$.

Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της f πρέπει να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο: $2x^2 - 3x + 1$

Η διακρίνουσά του είναι: $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$.

Οι ρίζες του είναι: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm 1}{4}$, δηλαδή: $x_1=\dfrac{3+1}{4}=\dfrac{4}{4}=1$ και $x_2=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται στη μορφή:

$$2x^2-3x+1=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-1)\cdot(2x-1)$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται:

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=2x-1$$

γ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, θα λύσουμε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$ με $x\neq 1$.

Από Δ2 και (β) ερώτημα, ισχύει: $2x-1=|x-5|$ (2)

Για να βγάλουμε την απόλυτη τιμή, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x-5\geq 0$ δηλαδή $x\geq 5$ έχουμε $|x-5|=x-5$. Η εξίσωση (2) γίνεται:

  $2x-1=x-5$
  $\Leftrightarrow 2x-x=-5+1$
  $\Leftrightarrow x=-4$

  Η ρίζα απορρίπτεται διότι $-4<5$.

- Αν $x-5<0$ δηλαδή $x<5$ έχουμε $|x-5|=-(x-5)=-x+5$. Η εξίσωση (2) γίνεται:

  $\Leftrightarrow 2x-1=-x+5$
  $\Leftrightarrow 2x+x=5+1$
  $\Leftrightarrow 3x=6$
  $\Leftrightarrow x=2$

  Η ρίζα $x=2$ είναι δεκτή γιατί $2<5$

  Για $x=2$ έχουμε ότι: $f(2)=2\cdot 2-1\Leftrightarrow f(2)=3$

  Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα κοινό σημείο το $A(2,3)$.