ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη (1) σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α)** Βλέπε ορισμό σελίδα 72 σχολικού βιβλίου.
β) Βλέπε ορισμό σελίδα 57 σχολικού βιβλίου.

Α3. **α)** Σωστό (βλέπε σελίδα 55 σχολικού βιβλίου.)
β) Λάθος (βλέπε σελίδα 69 σχολικού βιβλίου.)
(Το Σωστό είναι ότι $\sqrt{a^2} = |a|$)
γ) Λάθος (βλέπε σελίδα 79 σχολικού βιβλίου.)
(Το Σωστό είναι ότι η εξίσωση αx + β = 0 είναι αδύνατη)
δ) Σωστό (βλέπε σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.)
ε) Σωστό (βλέπε σελίδα 107 σχολικού βιβλίου.)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για την παράσταση $\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$ ισχύει:

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3\cdot 4]{2^4} = \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{4}\;\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4\cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Β2. Έχουμε:

$$B = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1\cdot(2-\sqrt{2}) + 1\cdot(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

Β3. Στο ερώτημα Β1 έχουμε αποδείξει ότι Α = 2, οπότε η παράσταση του δεύτερου μέλους της εξίσωσης ισούται με:

$$\frac{1}{A+\sqrt{A}}+\frac{1}{A-\sqrt{A}}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\mathrm{B}=2$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$x^3=\frac{1}{A+\sqrt{A}}+\frac{1}{A-\sqrt{A}} \Leftrightarrow x^3=B \Leftrightarrow x^3=2 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Όταν δύο μη κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $|a-3|-1$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση y=x είναι 1. Επομένως

$$|a-3|-1=1 \Leftrightarrow |a-3|=1+1 \Leftrightarrow |a-3|=2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha-3=2 \quad \text{ή} \quad \alpha-3=-2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha=3+2 \quad \text{ή} \quad \alpha=3-2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha=5 \quad \text{ή} \quad \alpha=1.$$

Θα εξετάσουμε αν είναι δεκτές και οι δυο τιμές του α.

- Για α = 5 η ευθεία ε γίνεται:
  $y=(|5-3|-1)x+(5^2+2|5|-3) \Leftrightarrow y=(|2|-1)x+(25+10-3) \Leftrightarrow$ y=x+32,
  η οποία είναι παράλληλη με την y=x.

- Για α = 1 η ε γίνεται:
  $y=(|1-3|-1)x+(1^2+2|1|-3) \Leftrightarrow y=(|-2|-1)x+(1+2-3) \Leftrightarrow$ y=x
  η οποία ταυτίζεται με την y=x. Άρα η τιμή α = 1 απορρίπτεται.
  Ώστε είναι α = 5.

Γ2. Επειδή η γωνία ω, που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα xx είναι οξεία, έχει εφω > 0. Όμως, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) ισούται με την εφω, οπότε

$$|a-3|-1>0 \Leftrightarrow |a-3|>1 \Leftrightarrow a-3<-1 \quad \text{ή} \quad \alpha-3>1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha<3-1 \quad \text{ή} \quad \alpha>3+1 \Leftrightarrow \alpha<2 \quad \text{ή} \quad \alpha>4$$

Γ3. Πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του Ο(0,0) να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Για $x = y = 0$ η εξίσωση της ε δίνει:

$$0=(|a-3|-1)\cdot 0+(a^2+2|a|-3) \Leftrightarrow a^2+2|a|-3=0 \Leftrightarrow$$

$$|a|^2+2|a|-3=0$$

Θέτουμε:

$$|a|=\omega \geq 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2+2\omega-3=0$$

Αυτή έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}$$

Είναι:

$$\omega_1=\frac{-2+4}{2}=1, \quad \omega_2=\frac{-2-4}{2}=-3 \text{ που απορρίπτεται.}$$

Για ω = 1 η (1) δίνει

$$|\alpha|=1 \Leftrightarrow \alpha=1 \ \text{ ή } \ \alpha=-1$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Το τριώνυμο έχει $\alpha=4$, $\beta=-4\lambda$, $\gamma=5\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4\lambda)^2-4\cdot 4\cdot 5\lambda=16\lambda^2-80\lambda$$

Είναι:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 16\lambda^2-80\lambda=0 \Leftrightarrow 16\lambda(\lambda-5)=0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda=0 \text{ ή } \lambda-5=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \ \text{ ή } \ \lambda=5.$$

Το πρόσημο της διακρίνουσας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		0		5		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Επομένως για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 5$ είναι $\Delta = 0$ και

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty) \text{ ενώ } \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 5)$$

Δ2. **α.** Το τριώνυμο έχει δυο ρίζες άνισες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

β. Η f έχει πεδίο ορισμού το IR αν και μόνο αν

$$4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \text{IR}$$

Αυτό ισχύει αν και μόνο αν

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [0, 5]$$

Δ3. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-4\lambda)}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{4\lambda}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \lambda$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5\lambda}{4}$$

Επομένως

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\lambda}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 5\lambda - 4 \Leftrightarrow 5\lambda - 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Όμως το $4 \notin (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$, επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ, ώστε να είναι $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1$

Δ4. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Α΄ είναι

$$0 \le P(A) \le 1 \quad \text{και} \quad 0 \le P(A') \le 1$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με λ=P(A). Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 \le 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A)x + 5P(A) \ge 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(1)}$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με λ = P(A'). Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_2 \le 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A')x + 5P(A') \ge 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2)}$$

- Για την πιθανότητα του δειγματικού χώρου Ω είναι P(Ω)=1. Έτσι $4x^2 - 4P(\Omega) + 5P(\Omega) = 4x^2 - 4x + 5$, που είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με λ=P(Ω)=1. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_3 \le 0$,

  επομένως

$$4x^2 - 4x + 5 \ge 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει:

$$[4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)][4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')][4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega)] \ge 0,$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$