ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 3 Μαΐου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελίδα 71.

Α2. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου, σελίδα 31.

Α3. α → Λ β→ Σ γ→ Σ δ → Σ ε → Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $|2x-1|=|1-2x|$ η ανίσωση γράφεται:

$$\frac{|2x-1|}{3}-1<\frac{3-|2x-1|}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\frac{|2x-1|}{3}-12\cdot 1<12\frac{(3-|2x-1|)}{4}\Leftrightarrow$$

$$4|2x-1|-12<3(3-|2x-1|)\Leftrightarrow$$

$$4|2x-1|-12<9-3|2x-1|\Leftrightarrow$$

$$4|2x-1|+3|2x-1|<12+9\Leftrightarrow$$

$$7|2x-1|<21\Leftrightarrow$$

$$|2x-1|<3\Leftrightarrow$$

$$-3<2x-1<3\Leftrightarrow$$

$$1-3<2x<1+3\Leftrightarrow$$

$$-2<2x<4\Leftrightarrow$$

$$-1<x<2\Leftrightarrow x\in(-1,2)$$

Άρα $\Delta=(-1,2)$.

Β2. Εφόσον $x\in\Delta$ ισχύει $-1<x<2$.
Άρα $\boxed{x+1>0}$ και $\boxed{x-2<0}$ (1)
Η παράσταση Α γράφεται:

$A=\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}+\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}\Leftrightarrow$
$A=\frac{|x+1|}{x+1}+\frac{|x-2|}{x-2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow} A=\frac{x+1}{x+1}-\frac{(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$
$A=1-1\Leftrightarrow$
$A=0$
Άρα ανεξάρτητη του x,δηλαδή σταθερός αριθμός.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$, ισχύει:
$f(1)=-4\Leftrightarrow$
$1^2+\kappa\cdot 1-3=-4\Leftrightarrow$
$1+\kappa-3=-4\Leftrightarrow$
$\kappa=-4-1+3\Leftrightarrow$
$\boxed{\kappa=-2}$
Έτσι ο τύπος της f γίνεται: $f(x)=x^2-2x-3$.
Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$,λύνουμε την εξίσωση
$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.
Η Διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι:
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$
Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες
$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow$
$x_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$ και $x_2=\frac{2-4}{2}=-\frac{2}{2}=-1$
Οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\Gamma(3,0)$ και $\Delta(-1,0)$.
Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$, βρίσκουμε το
$f(0)=0^2-2\cdot 0-3\Leftrightarrow f(0)=-3$.
Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $E(0,-3)$.

Γ2. Εφόσον η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Οπότε η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y=3x+\beta$ (1).
Ισχύει $f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)-3=1+2-3=0$.
Άρα η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $B(-1,0)$.
Έτσι οι συντεταγμένες του σημείου Β επαληθεύουν την εξίσωση (1),
γι' αυτό ισχύει: $0=-3+\beta\Leftrightarrow\beta=3$.
Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $\boxed{y=3x+3}$.

Γ3. Επειδή τα σημεία $K(1,a),\Lambda(3,\beta),M(5,\gamma)$ ανήκουν στην ευθεία ε: $y=3x+3$, οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της.
Άρα ισχύει: $a=3\cdot 1+3 \Leftrightarrow a=6$
$\beta=3\cdot 3+3 \Leftrightarrow \beta=12$
$\gamma=3\cdot 5+3 \Leftrightarrow \gamma=18$
Για να είναι οι αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου πρέπει και αρκεί $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow 2\cdot 12=6+18 \Leftrightarrow 24=24$ που ισχύει.
Οπότε οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **i.** Για την διακρινούσα Δ της εξίσωσης (1) ισχύει:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma \Leftrightarrow$

$\Delta=(4\lambda-2)^2-4\cdot 1\cdot \lambda(3-8\lambda) \Leftrightarrow$

$\Delta=16\lambda^2-16\lambda+4-12\lambda+32\lambda^2 \Leftrightarrow$

$\Delta=48\lambda^2-28\lambda+4 \Leftrightarrow$

$\Delta=4(12\lambda^2-7\lambda+1) \qquad (2)$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο: $12\lambda^2-7\lambda+1$
Η διακρίνουσά του Δ΄ είναι:

$\Delta'=(-7)^2-4\cdot 12\cdot 1 \Leftrightarrow$

$\Delta'=49-48 \Leftrightarrow$

$\Delta'=1$

Άρα οι ρίζες του είναι:

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta'}}{2\alpha} \Leftrightarrow$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{7\pm 1}{2\cdot 12} \Leftrightarrow$

$\lambda_1=\dfrac{7-1}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$ και $\lambda_2=\dfrac{7+1}{24}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$

Έτσι:

$$12\lambda^2-7\lambda+1=12\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)=3\cdot 4\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)=(3\lambda-1)\cdot(4\lambda-1).\ (3)$$

Άρα από (2) και (3) έχουμε:

$$\Delta=4(3\lambda-1)\cdot(4\lambda-1)$$

ii. Καθώς η (1) έχει διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta=0\Leftrightarrow$$

$$4(3\lambda-1)(4\lambda-1)=0\Leftrightarrow \quad 3\lambda-1=0\Leftrightarrow \quad 3\lambda=1\Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{1}{3}$$

ή

$$4\lambda-1=0\Leftrightarrow \quad 4\lambda=1\Leftrightarrow \quad \lambda=\frac{1}{4}$$

Ισχύει $\lambda_1<\lambda_2$, άρα:

$$\lambda_1=\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \lambda_2=\frac{1}{3}$$

Για $\lambda=\lambda_1=\frac{1}{4}$ η διπλή ρίζα της (1) είναι

$$x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{(4\lambda_1-2)}{2}=-\frac{\left(4\cdot\frac{1}{4}-2\right)}{2}=-\frac{(1-2)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Δ2. Άρα $P(A)=x_0=\frac{1}{2}$.

$$P(A\cap B)=\lambda_2=\frac{1}{3}.$$

$$P\left[(A\cup B)'\right]=\lambda_1=\frac{1}{4}.$$

Όμως $P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{4}=1-P(A\cup B)\Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B)=1-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4}.$$

Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$P(B)=\frac{9}{12}-\frac{6}{12}+\frac{4}{12}\Leftrightarrow P(B)=\frac{7}{12}.$$

Δ3. Εφόσον η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει Δ>0. Το πρόσημο της Διακρίνουσας Δ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Δ		+	0	-	0	+	

Έτσι $\lambda\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

Από τους τύπους Vietta έχουμε:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{(4\lambda-2)}{1}=-4\lambda+2.$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda(3-8\lambda)}{1}=3\lambda-8\lambda^2.$$

Ισχύει $4x_1x_2=3x_1+3x_2-26\Leftrightarrow$

$$4\left(3\lambda-8\lambda^2\right)=3\left(x_1+x_2\right)-26\Leftrightarrow$$

$$4\left(3\lambda-8\lambda^2\right)=3\left(-4\lambda+2\right)-26\Leftrightarrow$$

$$12\lambda-32\lambda^2=-12\lambda+6-26\Leftrightarrow$$

$$32\lambda^2-24\lambda-20=0\Leftrightarrow$$

$$8\lambda^2-6\lambda-5=0.$$

Η Διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι:

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot 8\cdot(-5)\Leftrightarrow$$

$$\Delta=36+160\Leftrightarrow$$

$$\Delta=196.$$

Άρα $\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{196}}{2\cdot 8}\Leftrightarrow \lambda_1=\frac{6+14}{16}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$ και $\lambda_2=\frac{6-14}{16}=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}$.