ΤΕΣΤ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

99
Β' Λυκείου
Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**
Ύλη: Συστήματα **03-10-15**

Θέμα 1^{o}:

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. **(15 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο . **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases}xy=6\\ x+y=5\end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\begin{cases}x-y=4\\ 3x-3y=9\end{cases}$ είναι αδύνατο . **Σ Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{o}:

Α. Να λύσετε το σύστημα :

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{3y-1}{4}=-x+5\\ 1-2x(y-1)=3x-y(2x-1)\end{matrix}\right\}$$

(12 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix}2x-3y+z=0\\ 4x+2y-z=1\\ 2x+5y-2z=1\end{matrix}\right\}$$

(13 μον.)

<u>Θέμα 3^ο:</u>

Α. Να βρείτε τις τιμές των α, β αν το παρακάτω σύστημα έχει λύση την (x,y)=(1,1).

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x+\beta y=2\alpha+2\beta-2\\ (3\alpha+1)x-2(\beta+1)y=\alpha+\beta\end{array}\right\}$$

(15 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}x+y+\omega=3\\ y+\omega+z=4\\ \omega+z+x=4\\ z+x+y=4\end{array}\right\}$$

(10 μον.)

<u>Θέμα 4^ο:</u> Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}x+(2\lambda-1)y=\lambda\\ \lambda x+y=\lambda\end{array}\right\}$.

Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ.

(25 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1$^{\text{ο}}$:

Α. . $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

● Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

→ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .

→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\frac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Β. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Α. Έχουμε :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x-2y}{2}-\frac{3y-1}{4}=-x+5\\&1-2x(y-1)=3x-y(2x-1)\end{aligned}\right\}\overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned}&2(x-2y)-(3y-1)=-4x+20\\&1-2xy+2x=3x-2xy+y\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&2x-4y-3y+1=-4x+20\\&-2xy+2x-3x+2xy-y=-1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&2x-4y-3y+4x=20-1\\&-x-y=-1\end{aligned}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{aligned}&6x-7y=19\\&x+y=1\end{aligned}\right\}\underset{\cdot 7}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned}&6x-7y=19\\&7x+7y=7\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned}&13x=26\\&x+y=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&x=2\\&y=-1\end{aligned}\right\}$$

Άρα $(x,y)=(2,-1)$.

Β. Έχουμε το (Σ): $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \ \ (1) \\ 4x+2y-z=1 \ \ (2) \\ 2x+5y-2z=1 \ (3) \end{array}\right\}$

Από τις (1), (2) έχουμε: $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 4x+2y-z=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 6x-y=1 (4)$

Από τις (1), (3) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ 2x+5y-2z=1 \end{array}\right\} \overset{\cdot(2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 4x-6y+2z=0 \\ 2x+5y-2z=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 6x-y=1 (5)$$

Από τις (4), (5) έχουμε:

$\left.\begin{array}{l} 6x-y=1 \\ 6x-y=1 \end{array}\right\}$. Άρα το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$(x,y,z)=(x,6x-1,16x-3), x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 3^{o}:

Α. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=2\alpha+2\beta-2 \\ (3\alpha+1)x-2(\beta+1)y=\alpha+\beta \end{array}\right\}$ έχει λύση την (x,y)=(1,1)

άρα θα επαληθεύεται από αυτή. Οπότε για x=1 και y=1 έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=2\alpha+2\beta-2 \\ 3\alpha+1-2(\beta+1)=\alpha+\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=2 \\ 3\alpha-2\beta-\alpha-\beta=-1+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=2 \\ 2\alpha-3\beta=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=2-\beta \\ 2(2-\beta)-3\beta=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=2-\beta \\ -5\beta=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha=\dfrac{7}{5} \\ \beta=\dfrac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Β. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x+y+\omega=3\ (1)\\ y+\omega+z=4\ (2)\\ \omega+z+x=4\ (3)\\ z+x+y=4\ (4)\end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2),(3),(4) προκύπτει:

$3x+3y+3z+3\omega=15 \Leftrightarrow x+y+z+\omega=5\ (5)$

Αφαιρώντας από την (5) διαδοχικά τις (1),(2),(3),(4) έχουμε:

(5)-(1): $z=2$
(5)-(2): $x=1$
(5)-(3): $y=1$
(5)-(4): $\omega=1$
Άρα $(x,y,z,\omega)=(1,1,2,1)$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{aligned} x+(2\lambda-1)y=\lambda\\ \lambda x+y=\lambda\end{aligned}\right\}$.

Θα βρούμε τις ορίζουσες του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\lambda-1\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=1-\lambda(2\lambda-1)=1-2\lambda^2+\lambda=-\left(2\lambda^2-\lambda-1\right)=$$
$$-\left(\lambda^2+\lambda^2-\lambda-1\right)=-\left[\lambda(\lambda-1)+(\lambda-1)(\lambda+1)\right]=-(\lambda-1)(2\lambda+1)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda & 2\lambda-1\\ \lambda & 1\end{vmatrix}=\lambda-\lambda(2\lambda-1)=\lambda-2\lambda^2+\lambda=-2\lambda^2+2\lambda=$$
$$-2\lambda(\lambda-1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)$$

* Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(2\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-2\lambda(\lambda-1)}{-(\lambda-1)(2\lambda+1)},\frac{\lambda(1-\lambda)}{-(\lambda-1)(2\lambda+1)}\right)=\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1},\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right).$$

* Αν $D=0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(2\lambda+1)=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$ τότε:

→ Αν λ=1 το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ δηλαδή έχει άπειρες λύσεις, της μορφής (x,y)=(x, 1-x), $x \in \mathbb{R}$.

→ Αν $\lambda=-\frac{1}{2}$ το σύστημα γίνεται: $\left.\begin{array}{l} x-2y=-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x+y=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \underset{\cdot(-4)}{\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} 2x-4y=-1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right\}$,

δηλαδή το σύστημα είναι αδύνατο.