ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

98

Ον/μο:……………….. **Β΄ Λυκείου**

Ύλη:Διανύσματα **4-11-2017**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και O σημείο αναφοράς. Για την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του AB να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$. **(μον.10)**

Α2. Τι ονομάζουμε συντεταγμένες ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$; **(μον.5)**

Α3. Να κυκλώσετε τι Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ Σ Λ

2. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-3,\sqrt{3})$ έχει γωνία $\dfrac{5\pi}{6}$ Σ Λ

3. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2$ Σ Λ

4. $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$ Σ Λ

5. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΜ, ΒΝ, ΓΛ που τέμνονται στο G. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{\Gamma\Lambda}=\vec{0}$ **(μον.8)**

β) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ **(μον.7)**

Β2. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=-3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{\alpha}+6\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **(μον.10)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,4),\ \ \vec{\beta}=(-2,1),\ \ \vec{\gamma}=(4,-2)$.
Να εκφράσετε το $\vec{\beta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. **(μον.8)**

Γ2. Αν $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$ να υπολογίσετε το μέτρο του
$\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+|\vec{\gamma}|\cdot\vec{\beta}$. **(μον.10)**

Γ3. Αν $A(-3,1),\ \ B(\mu,3)$ και $\Gamma(-5,1-\mu)$ να βρείτε τις τιμές
του μ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι κορυφές τριγώνου. **(μον.7)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(-1,-7)$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=(3,-3)$.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. **(μον.8)**
β) Υπολογίστε το μήκος της διαμέσου ΑΔ. **(μον.7)**

Δ2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1,\ \ |\vec{\beta}|=2$
και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=120°$. Υπολογίστε τα:
α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **β)** $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|$. **(μον.10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

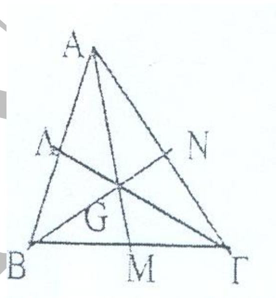
ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2 Θεωρία

Α3. 1Λ, 2Σ, 3Λ, 4Σ, 5Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.α) Είναι:



$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{\Gamma\Lambda}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}}{2}+\frac{\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B})=\vec{0}$$

β) Είναι:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma})\overset{GB\Gamma}{=\!=}\overrightarrow{GA}+2\cdot\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$

Β2.Είναι:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3\vec{\alpha}+4\vec{\beta})-(\vec{\alpha}+5\vec{\beta})=-4\vec{\alpha}-\vec{\beta} \quad \text{και}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=(5\vec{\alpha}+6\vec{\beta})-(-3\vec{\alpha}+4\vec{\beta})=8\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$$

οπότε $\overrightarrow{B\Gamma}=-2\overrightarrow{AB}\Rightarrow A,B,\Gamma$ συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εστω ότι $\vec{\beta}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\gamma}$ οπότε

$$(-2,1)=\kappa\cdot(3,4)+\lambda\cdot(4,-2)\Rightarrow(-2,1)=(3\kappa+4\lambda,4\kappa-2\lambda)\Rightarrow$$

$$3\kappa+4\lambda=-2 \quad \text{και} \quad 4\kappa-2\lambda=1\Rightarrow\kappa=0 \text{ και } \lambda=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{\beta}=-\frac{1}{2}\vec{\gamma}}.$$

Γ2. Είναι: $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+|\vec{\gamma}|\cdot\vec{\beta}$ και αν $\vec{\gamma}=(x,y)$ τότε

$$(x,y)=(-1,2)+|\vec{\gamma}|(2,-3)\Rightarrow(x,y)=(-1+2|\vec{\gamma}|,2-3|\vec{\gamma}|)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1+2|\vec{\gamma}| \\ y=2-3|\vec{\gamma}| \end{array}\right|\Rightarrow|\vec{\gamma}|^2=\left(-1+2|\vec{\gamma}|\right)^2+\left(2-3|\vec{\gamma}|\right)^2\Rightarrow$$

$$12|\vec{\gamma}|^2-16|\vec{\gamma}|+5=0\Rightarrow\boxed{|\vec{\gamma}|=\frac{5}{6} \text{ ή } |\vec{\gamma}|=\frac{1}{2}}$$

Γ3. Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ κορυφές τριγώνου πρέπει να μην είναι συνευθειακά.

Είναι: $\overrightarrow{AB}=(\mu+3,2)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-2,-\mu)$ και $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}\mu+3 & 2\\ -2 & -\mu\end{vmatrix}=$

$=-\mu^2-3\mu+4$. Πρέπει $-\mu^2-3\mu+4\neq 0 \Rightarrow$ $\mu\neq 1$ και $\mu\neq -4$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. α) Είναι: $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}=(-3,3)-(1,7)=(-4,-4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=(-4)\cdot 3+(-4)\cdot(-3)=0$ άρα $\overrightarrow{A\Gamma}\perp\overrightarrow{\Gamma B}$ οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Γ.

β) Είναι: $\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}}{2}=\dfrac{1}{2}\big((-4,-4)+(-1,-7)\big)=\left(-\dfrac{5}{2},-\dfrac{11}{2}\right)$ και

$$\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{146}{4}}=\frac{\sqrt{146}}{2}$$

Δ2. α) Είναι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=1\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu 120^{o}=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

β) Είναι: $\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+9\vec{\beta}^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$

$=4\cdot 1^2+9\cdot 2^2-12\cdot(-1)=52$ άρα $\left|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right|=\sqrt{52}$.