ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

97

Ον/μο:……………….. **Β΄ Λυκείου**

Ύλη:Διανύσματα **27-11-2016**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1.Δώστε τον ορισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$. **(μον.5)**

Α2.α)Δώστε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **(μον.3)**

β)Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ πως εκφράζεται το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$; **(μον.2)**

Α3.Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ να δείξετε ότι:
$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. **(μον.5)**

Α4.Να κυκλώσετε το Σ ή το λ στις προτάσεις:

1.Αν $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{2}{5}$ τότε $\vec{\alpha}=(5,2)$ Σ Λ

2.Αν $A(-4,7)$ και $B(2,-3)$ το μέσο Μ του ΑΒ είναι $M(-1,2)$ Σ Λ

3.Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα τότε $\dfrac{\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ Σ Λ

4.Για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ Σ Λ

5.Αν $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow$ ΑΒΓΔ ρόμβος, όπου $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$ Σ Λ

(μον.10)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x+1,-3)$ και $\vec{\beta}=(1-x,3x-2)$, $x\in R$.

Β1.Να δείξετε ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά για κάθε $x\in R$. **(μον.7)**

Β2.Για $x=-4$, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον $x'x$.**(μον.7)**

Β3.Για x=2, να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **(μον.6)**

Β4.Για x=0, βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ αντίρροπο του $\vec{\beta}$ με μέτρο $\sqrt{10}$. **(μον.6)**

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έστω τα σημεία Α(1,3) , Β(5,1).

Αν $4\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=2\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ και Μ το μέσον του ΑΒ

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{OM}$

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο , Γ , Μ είναι συνευθειακά

γ) να βρείτε το λ , όταν $\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma M}$ **(μον.9)**

Γ2. Δίνονται τα σημεία $A(3,-1)$, $B(\kappa-1\ ,\ 2\kappa-1)$ και $\Gamma(\kappa,\ \kappa+1)$. Να δείξετε ότι , για κάθε $\kappa\in R$, τα σημεία Α , Β , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου. **(μον.4)**

Γ3.Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=2 Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

α) $\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}$ **β)** $\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}$ **γ)** $\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}$ **δ)** $\vec{A\Gamma}\cdot\vec{\Delta A}$ **(μον.12)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.Να βρεθούν οι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, αν ισχύει

$(\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})\cdot\vec{A\Delta}=(\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma})\cdot\vec{AB}$ όπου $\vec{A\Delta}$ διάμεσος. **(μον.8)**

Δ2. Σ’ ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχουμε $\vec{AB}=(1,2)$, $\vec{B\Gamma}=(-1,3)$.Βρείτε τις γωνίες του παραλληλογράμμου και τα μήκη των διαγωνίων. **(μον.9)**

Δ3. Δείξτε (διανυσματικά) ότι οι διαγώνιες ρόμβου τέμνονται κάθετα. **(μον.8)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1, Α2, Α3 Θεωρία
Α3. 1Λ, 2Σ, 3Λ, 4Λ, 5Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.Ε ίναι:

$$\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ 1-x & 3x-2 \end{vmatrix}=(x+1)(3x-2)+3(1-x)=3x^2-2x+1\neq 0$$

γιατί έχει $\Delta=-8<0$. Αρα τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.

Β2.Για $x=-4$ είναι $\vec{\alpha}=(-3,-3)$ με $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{-3}{-3}=1$ και η διανυσματική του ακτίνα είναι στο 3^o τεταρτημόριο, άρα $\omega_{\vec{\alpha}}=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Β3.Για $x=2$ είναι $\vec{\alpha}=(3,-3)$, $\vec{\beta}=(-1,4)$.
Εστω κ, λ πραγματικοί αριθμοί ώστε
$\vec{u}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}$ οπότε $(3,2)=\kappa\cdot(3,-3)+\lambda\cdot(-1,4)\Leftrightarrow$
$(3,2)=(3\kappa-\lambda,-3\kappa+4\lambda)\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} 3\kappa-\lambda=3 \\ -3\kappa+4\lambda=2 \end{matrix}\right| \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 3\lambda=5 \\ 3\kappa-\lambda=3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda=\frac{5}{3} \\ 3\kappa-\frac{5}{3}=3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \lambda=\frac{5}{3} \\ \kappa=\frac{14}{9} \end{matrix}$$

. Αρα $\vec{u}=\frac{14}{9}\vec{\alpha}+\frac{5}{3}\vec{\beta}$.

Β4.Για $x=0$ είναι $\vec{\beta}=(1,-2)$ με $|\vec{\beta}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$
Αφού $\vec{\gamma}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ θα υπάρχει λ<0 ώστε $\vec{\gamma}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.
Αφού $|\vec{\gamma}|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|\lambda\vec{\beta}|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|\lambda|\sqrt{5}=\sqrt{10}\Leftrightarrow|\lambda|=\sqrt{2}$ και επειδή λ<0 είναι $\lambda=-\sqrt{2}$. Αρα $\vec{\gamma}=-\sqrt{2}\cdot\vec{\beta}\Rightarrow$ $\vec{\gamma}=(-\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.α) Το μέσο Μ του ΑΒ είναι το $\mathrm{M}\left(\frac{1+5}{2},\frac{3+1}{2}\right)$ δηλ. Μ(3,2).

Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5-1,1-3)$ δηλ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-2)$.

● Απ' την ισότητα $4\cdot\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ έχουμε:
$4(x,y)=2\cdot(1,3)+(4,-2)\Leftrightarrow(4x,4y)=(6,4)\Leftrightarrow$
$4x=6$ και $4y=4\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $y=1$. Αρα $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\left(\frac{3}{2},1\right)$.

● Είναι $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(3,2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OM}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\xRightarrow{\text{κοινό άκρο το O}}$ Ο, Γ, Μ συνευθειακά.

γ) Αφού $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}=\lambda\overrightarrow{\Gamma\mathrm{M}}\Rightarrow\left(\frac{3}{2},1\right)=\lambda\left(3-\frac{3}{2},2-1\right)\Rightarrow\left(\frac{3}{2},1\right)=\lambda\left(\frac{3}{2},1\right)$

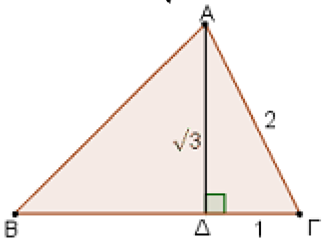
άρα $\lambda=1$.

Γ2. Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=(\kappa-4,2\kappa)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(\kappa-3,\kappa+2)$ οπότε:

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})=\begin{vmatrix}\kappa-4 & 2\kappa\\ \kappa-3 & \kappa+2\end{vmatrix}=((\kappa-4)\cdot(\kappa+2)-2\kappa\cdot(\kappa-3))=$$

$=\kappa^2+2\kappa-4\kappa-8-2\kappa^2+6\kappa=-\kappa^2+4\kappa-8\neq0$ γιατί έχει Δ=− 16<0.
Αρα τα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ δεν είναι συγγραμμικά οπότε τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Αρα είναι κορυφές τριγώνου.

Γ3. Στο τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}\Rightarrow\mathrm{A\Delta}^2=\mathrm{A\Gamma}^2-\Delta\Gamma^2=2^2-1^2=3\Rightarrow\mathrm{A\Delta}=\sqrt{3}$.



α) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|\cdot\text{συν}\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=$

$=2\cdot2\cdot\text{συν}60^{o}=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2$ δηλ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=2$.

β) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=-2\cdot2\cdot\text{συν}\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=$

$=-2\cdot2\cdot\text{συν}60^{o}=-2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=-2$ δηλ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=-2$.

γ) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|\cdot\text{συν}\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\sqrt{3}\cdot2\cdot\text{συν}30^{o}=\sqrt{3}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

δηλ. $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=3$.

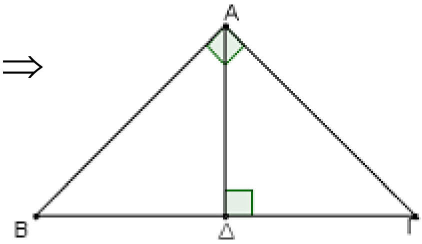
δ) $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}}=-\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\overset{(\gamma)}{=\!=}-3$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εχουμε: $(\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma})\cdot\vec{A\Delta}=(\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma})\cdot\vec{AB}$ και επειδή τα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AB}$ δεν είναι συγγραμμικά θα είναι:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\\ \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\\ \overrightarrow{A\Delta}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{A}=90^o\\ B\overset{\triangle}{A}\Gamma \text{ ισοσκλές}\end{matrix}\right| \Rightarrow$$

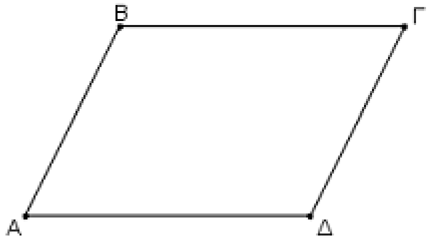
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{A}=90^o\\ A\Delta \text{ ύψος και διάμεσος}\end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix}\hat{A}=90^o\\ \hat{B}=\hat{\Gamma}=45^o\end{matrix}.$$



Δ2. ●Είναι: $\sigma\upsilon\nu(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Gamma})=\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{B\Gamma}|}=$

$$-\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 3}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα}$$

$\hat{B}=\hat{\Delta}=135^o$ και $\hat{A}=\hat{\Gamma}=45^o$.



●Είναι: $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=(1,2)+(-1,3)=(0,5)$ και άρα $|\overrightarrow{A\Gamma}|=5$.

●Επίσης $\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}=(-1,3)+(-1,-2)=(-2,1)$ και $|\overrightarrow{B\Delta}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}\Rightarrow|\overrightarrow{B\Delta}|=\sqrt{5}$.

Δ3. Εχουμε:

$$\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}=(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB})=$$

$$\overrightarrow{A\Delta}^2-\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{A\Delta}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0.$$

Αρα $\overrightarrow{A\Gamma}\perp\overrightarrow{B\Delta}$.