

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

96

Β' Λυκείου
Γεν. Παιδείας
15-03-15

Ον/μο:.....

Υλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων-Τριγωνομετρία -
Πολυώνυμα- Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θέμα 1^ο:

- A. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , του πεδίου ορισμού της; (6 μον.)
- B. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο; (6 μον.)
- Γ. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. (8 μον.)
- Δ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
- i. Το σύστημα
$$\begin{cases} (2\sigma\upsilon\nu\theta)x - 2y = 5 \\ (\eta\mu^2\theta)x + (\sigma\upsilon\nu\theta)y = 4 \end{cases}$$
 έχει πάντοτε μοναδική λύση για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Σ Λ
- ii. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5$, $x \in [-2, 2)$ είναι περιττή. Σ Λ
- iii. Η εξίσωση $\eta\mu x = 1$, $x \in [0, 20\pi]$ έχει άπειρες λύσεις. Σ Λ
- iv. Αν ο διαιρέτης σε μία διαίρεση πολυωνύμων είναι δευτέρου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει τη μορφή $\alpha x + \beta$ με $\alpha \neq 0$. Σ Λ
- v. Η εξίσωση $2x^4 - 3x^3 - 3x + 2$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\pm 1, \pm 2$. Σ Λ
- (5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο: Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x - \lambda y = 1 \\ (\lambda + 1)x - 2y = \lambda + 1 \end{cases} (\Sigma).$$

- A. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) και στη συνέχεια να τη βρείτε. (9 μον.)
- B. Για $\lambda=1$, να βρείτε τη λύση (x, y) του συστήματος που ικανοποιεί τη σχέση $x \cdot y = 2$. (8 μον.)
- Γ. Για την τιμή του λ , που το σύστημα είναι αδύνατο, να λύσετε την εξίσωση: $\lambda\sigma\upsilon\nu^4\theta + \eta\mu^3\theta - 7\eta\mu\theta + 6 = 0$. (8 μον.)

Θέμα 3^ο:

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^3 \sin^2 \theta + 2(3\eta\mu\theta + 1)x - 2$, το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

A. Να βρείτε τις τιμές του θ και στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$P(x) = 3x^3 - x - 2. \quad (7 \text{ μον.})$$

B. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$

$$\text{διαίρεται με το } x^2 + x + \alpha. \quad (9 \text{ μον.})$$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{P(x)}{3x^2 + 3x + 2} \geq \frac{1}{x+1}. \quad (9 \text{ μον.})$

Θέμα 4^ο:

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

A. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ όταν:

- το $P(x)$ έχει αρνητική ακέραια ρίζα,
- η τιμή του $P(x)$, όταν $x=2$, ισούται με 15,
- το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ ισούται με 4.

(13 μον.)

B. Για $\alpha=\beta=\gamma=1$:

i. Να λύσετε την εξίσωση: $P(\eta\mu 2x)=0, 0 < x < \pi$.

(6 μον.)

ii. Να αποδειχθεί ότι: $P(\epsilon\phi x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(6 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

B. Τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένας κύκλος με κέντρο την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και ακτίνα 1.

Γ. ($\Rightarrow$) Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε:

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x=\rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho)=0$.

Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

παίρνουμε $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$,

που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

A. i.Σ ii.Λ iii. Λ iv.Λ v.Λ

Θέμα 2^ο:

A. Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ) . Είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ \lambda+1 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda(\lambda+1) = -2\lambda + \lambda^2 + \lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda+1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) - (\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Για να έχει το (Σ) μοναδική λύση πρέπει:

$D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$. Η μοναδική λύση του (Σ)

$$\text{είναι: } (x_0, y_0) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{(\lambda+2)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}, \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)} \right) =$$

$$= \left(\frac{\lambda+2}{\lambda}, \frac{\lambda+1}{\lambda} \right).$$

Β. Για $\lambda=1$, το (Σ) γίνεται: $\left. \begin{matrix} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x-y=1 \\ :2 \quad x-y=1 \end{matrix} \right\}$. Δηλαδή έχει άπειρες

λύσεις της μορφής $(x, y) = (x, x-1), x \in \mathbb{R}$.

Τότε : $x \cdot y = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2$.

Άρα $(x, y) = (-1, -2)$ ή $(x, y) = (2, 1)$.

Γ. Για να είναι το (Σ) αδύνατο πρέπει καταρχάς $D=0$ δηλαδή $\lambda=1$ ή $\lambda=0$.

Για $\lambda=1$ από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι το (Σ) έχει άπειρες

λύσεις. Για $\lambda=0$ το (Σ) γίνεται: $\left. \begin{matrix} 0x-0y=1 \\ x-2y=1 \end{matrix} \right\}$. Οπότε είναι αδύνατο.

Για $\lambda=0$ η εξίσωση: $\lambda \sin^4 \theta + \eta \mu^3 \theta - 7\eta \mu \theta + 6 = 0$ γίνεται:

$$\eta \mu^3 \theta - 7\eta \mu \theta + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\text{Θέτουμε } \eta \mu \theta = \omega}{\omega^3 - 7\omega + 6 = 0} \Leftrightarrow \omega^3 - 6\omega - \omega + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega(\omega^2 - 1) - 6(\omega - 1) = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega - 1)(\omega + 1) - 6(\omega - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega - 6) = 0 \Leftrightarrow \omega - 1 = 0 \text{ ή } \omega^2 + \omega - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 1 \text{ ή } \omega = -3 \text{ ή } \omega = 2.$$

$$\text{Οπότε } \eta \mu \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή}$$

$$\eta \mu \theta = -3 \text{ αδύνατη εφόσον } -1 \leq \eta \mu \theta \leq 1 \text{ ή } \eta \mu \theta = 2 \text{ αδύνατη.}$$

Θέμα 3^ο:

Α. Για να έχει το $P(x) = 4x^3 \sin^2 \theta + 2(3\eta \mu \theta + 1)x - 2$ παράγοντα το $x-1$

$$\text{πρέπει: } P(1) = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 \theta + 2(3\eta \mu \theta + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\sin^2 \theta + 6\eta \mu \theta = 0 \Leftrightarrow 4(1 - \eta \mu^2 \theta) + 6\eta \mu \theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4\eta \mu^2 \theta + 6\eta \mu \theta + 4 = 0 \quad \overset{\text{Θέτουμε } \eta \mu \theta = \omega}{\Leftrightarrow} \quad -2\omega^2 + 3\omega + 2 = 0, \Delta = 25 > 0. \text{ Άρα η}$$

εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις: $\omega_1 = -\frac{1}{2}$ και $\omega_2 = 2$. Τότε έχουμε:

$\eta \mu \theta = 2$ απορρίπτεται ή

$$\eta \mu \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta \mu \theta = -\eta \mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta \mu \theta = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow$$

$$\theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \text{ ή } \theta = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όταν το θ πάρει τις παραπάνω τιμές είναι $\eta\mu\theta = -\frac{1}{2}$, και τότε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \text{ Οπότε αντικαθιστώντας}$$

αυτές τις τιμές στο αρχικό πολυώνυμο θα πάρουμε:

$$P(x) = 4x^3 \cdot \frac{3}{4} + 2 \left[3 \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \right] x - 2 = 3x^3 - x - 2.$$

Β. Για να διαιρείται το $P(x) = 3x^3 - x - 2$ με το $x^2 + x + \alpha$ πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης τους να είναι 0. Εκτελούμε λοιπόν τη διαίρεση:

$3x^3 + 0x^2 - x - 2$	$x^2 + x + \alpha$
$-3x^3 - 3x^2 - 3\alpha x$	$3x - 3$
$-3x^2 - (3\alpha + 1)x - 2$	
$+3x^2 + 3x + 3\alpha$	
$(-3\alpha + 2)x + 3\alpha - 2$	

$$\text{Τότε: } \upsilon(x) = 0 \Leftrightarrow (-3\alpha + 2)x + 3\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 2 = 0 \text{ και } 3\alpha - 2 = 0$$

$$\text{δηλαδή, } \alpha = \frac{2}{3}.$$

Γ. Από το Β ερώτημα και την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \left(x^2 + x + \frac{2}{3} \right) (3x - 3) = 3 \left(x^2 + x + \frac{2}{3} \right) (x - 1) = (3x^2 + 3x + 2)(x - 1)$$

$$\text{Οπότε η ανίσωση } \frac{P(x)}{3x^2 + 3x + 2} \geq \frac{1}{x+1} \text{ γίνεται } \frac{(3x^2 + 3x + 2)(x - 1)}{(3x^2 + 3x + 2)} \geq \frac{1}{x+1}.$$

Για το τριώνυμο $3x^2 + 3x + 2$ έχουμε $\Delta = -15 < 0$ άρα το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του $a=3 > 0$. Δηλαδή, $3x^2 + 3x + 2 > 0$. Τότε:

$$\frac{(3x^2 + 3x + 2)(x - 1)}{(3x^2 + 3x + 2)} \geq \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x - 1 \geq \frac{1}{x+1} \stackrel{\text{Πρέπει } x \neq -1}{\Leftrightarrow} x - 1 - \frac{1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x - 1)(x + 1) - 1}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 - 1}{x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x + 1} \geq 0.$$

Για το πρόσημο του πηλίκου, θα βρούμε τις ρίζες των πολυωνύμων.

$$-x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Ο πίνακας προσήμων του πηλίκου είναι:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
x^2-2	+	○	-	-	○	+
$x+1$	-	-	-	+	+	+
Γ	-	○	+	-	○	+

Άρα η ανίσωση έχει λύσεις τα $x \in [-\sqrt{2}, -1) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$.

Θέμα 4^ο:

A. Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1$, σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού του όρου, δηλαδή το ± 1 . Εφόσον το πολυώνυμο έχει αρνητική ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι το -1. Επομένως είναι: $P(-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$-\alpha + \beta - \gamma + 1 = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta - \gamma = -1 \quad (1).$$

Επίσης, η τιμή του $P(x)$, όταν $x=2$, ισούται με 15 άρα έχουμε:

$$P(2) = 15 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + 1 = 15 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta + 2\gamma = 14 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha + 2\beta + \gamma = 7 \quad (2).$$

Τέλος, έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ ισούται με 4, άρα: $P(1) = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma + 1 = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3 \quad (3).$

Θα λύσουμε το (Σ) των (1), (2), (3) :

$$\left. \begin{array}{l} -\alpha + \beta - \gamma = -1 \quad (1) \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 7 \quad (2) \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \quad (3) \end{array} \right\} (\Sigma).$$

$$\text{Έχουμε: } \left. \begin{array}{l} -\alpha + \beta - \gamma = -1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \Leftrightarrow 2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

$$\text{Επίσης: } \left. \begin{array}{l} -\alpha + \beta - \gamma = -1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 7 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \Leftrightarrow 3\alpha + 3\beta = 6 \xrightarrow{\beta=1} \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην (3) όπου $\alpha=1$ και $\beta=1$ έχουμε $\gamma=1$.

Β. Για $\alpha=\beta=\gamma=1$ το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Τότε:

$$P(\eta\mu 2x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 2x + \eta\mu^2 2x + \eta\mu 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Θέτουμε } \eta\mu 2x = \omega$$

$$\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega^2(\omega + 1) + (\omega + 1) = 0 \Leftrightarrow (\omega + 1)(\omega^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \quad \text{ή} \quad \omega^2 + 1 = 0 \text{ αδύνατη.}$$

$$\text{Άρα είναι: } \eta\mu 2x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \\ x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως πρέπει $0 < x < \pi$ οπότε:

$$0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{3\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 < \kappa + \frac{3}{4} < 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < \kappa < \frac{1}{4} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa = 0.$$

Για $\kappa=0$ είναι: $x=3\pi/4$. Επίσης:

$$0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi - \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 < \kappa - \frac{1}{4} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4} \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa = 1.$$

Για $\kappa=1$ είναι: $x=3\pi/4$.

Επομένως η λύση της εξίσωσης είναι $x=3\pi/4$.

Γ. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$. Τότε έχουμε:

$$P(\epsilon\phi x) = \epsilon\phi^3 x + \epsilon\phi^2 x + \epsilon\phi x + 1 = (\epsilon\phi x + 1)(\epsilon\phi^2 x + 1) \quad \begin{matrix} \epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \\ \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2 x} \end{matrix}$$

$$\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = \left(\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}.$$