ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

95

Ον/μο:……………….. **Β΄Λυκείου**

Ύλη: Ευθεία -Κύκλος **Θετ-Τεχν Κατ.**

15-2-2015

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ για τις διάφορες τιμές των Α, Β, Γ. **(μον.10)**

Α.2.Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται απ' τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, $x_1 \neq x_2$. **(μον.5)**

Α3.Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1.Η εξίσωση $y-2=\lambda(x-3)$,$\lambda\in R$ παριστάνει όλες τις ευθείες που διέρχονται απ' το σημείο Α(3,2) Σ Λ

2.Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$, όταν $A=-B$, είναι κάθετη στη διχοτόμο του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημόριου. Σ Λ

3.Η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ παριστάνει κύκλο που διέρχεται από το Ο(0,0). Σ Λ

4.Το σημείο Μ(συνθ,ημθ) είναι σημείο του κύκλου $x^2+y^2=1$ και το διάνυσμα $\vec{v}=(-\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι κάθετο στην ΟΜ. Σ Λ

5.Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\lambda x+\beta_2$ έχουν απόσταση
$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\dfrac{|\beta_1+\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ Σ Λ

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = yx$.

Β1.Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται στην αρχή των αξόνων. **(μον.9)**

Β2.Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(2+\sqrt{2},\sqrt{2})$ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 **(μον.8)**

Β3.Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2. **(μον.8)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\varepsilon_\lambda : (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y + 1 - \lambda = 0$

Γ1.Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία. **(μον.6)**

Γ2.Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες ε_λ διέρχονται από σταθερό σημείο. **(μον.7)**

Γ3.Ποιά απ' όλες τις ευθείες διέρχεται από το σημείο Α(-1,2); **(μον.6)**

Γ4.Βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία του ερωτήματος Γ3 με τους άξονες. **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις:

$C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=25$ και $C_2:x^2+(y+1)^2=9$

1.Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου C_1 στο σημείο Α(5,-1). **(μον.7)**

2.Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται του κύκλου C_2 . **(μον.6)**

Δ2.Δίνονται οι γραμμές με εξίσωση

$C_\alpha: x^2+y^2-2\alpha x-4\alpha y+5\alpha^2-1=0, \alpha\in R$.

1.Να αποδείξετε ότι η C_α παριστάνει κύκλους. **(μον.5)**

2.Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων αυτών των κύκλων. **(μον.4)**

3.Υπάρχει κύκλος C_α που διέρχεται από το σημείο Α(1,1); **(μον.3)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Α2.** Θεωρία

Α3. 1Λ, 2Σ, 3Σ, 4Σ, 5Λ

ΘΕΜΑ Β

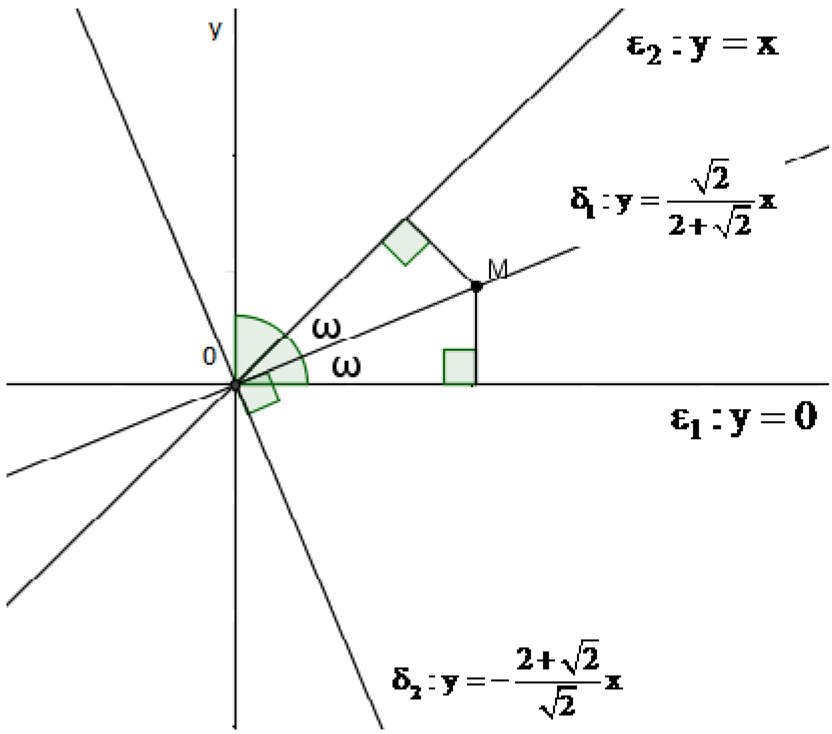
Β1. Εχουμε: $y^2 = yx \Leftrightarrow y^2 - yx = 0 \Leftrightarrow y(y-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\varepsilon_1 : y = 0$ (ο $x'x$) ή $\varepsilon_2 : x - y = 0$ (διχοτόμος 1ου και 3ου τεταρτ.).

Οι ευθείες αυτές διέρχονται απ' το O(0,0).

Β2. Είναι : $d(M,\varepsilon_1) = \sqrt{2}$ και $d(M,\varepsilon_2) = \dfrac{\left|2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$

άρα $d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2)$.



Β3. Είναι: $\delta_1 : y = \varepsilon\varphi\omega \cdot x \Rightarrow$ $\delta_1 : y = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot x$

Επειδή $\delta_1 \perp \delta_2 \Rightarrow \lambda_{\delta_1} \cdot \lambda_{\delta_2} = -1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \lambda_{\delta_2} = -1 \Rightarrow \lambda_{\delta_2} = -\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

άρα $\delta_2 : y = -\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot x$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να παριστάνει η $\varepsilon_\lambda : (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y + 1 - \lambda = 0$ ευθεία πρέπει να μη μηδενίζονται συγχρόνως οι $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ και $\lambda^2 - 4\lambda + 3$.

Αν λοιπόν είναι $\left.\begin{array}{r} \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda = 1$.

Πρέπει επομένως να είναι $\lambda \neq 1$

Γ2. Η εξίσωση $\varepsilon_\lambda : (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y + 1 - \lambda = 0$ γράφεται:

$$\lambda^2 x - 3\lambda x + 2x + \lambda^2 y - 4\lambda y + 3y + 1 - \lambda = 0, \forall \lambda \in R \Leftrightarrow$$

$$(x + y)\lambda^2 - (3x + 4y + 1)\lambda + 2x + 3y + 1 = 0 \ \forall \lambda \in R, \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 3x + 4y + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{array}\right| ,$$

άρα όλες οι ευθείες διέρχονται απ' το σημείο $M(1, -1)$

Γ3. Η ευθεία που διέρχεται απ' το σημείο Α(-1,2) θα επαληθεύεται απ' αυτό δηλ. θα ισχύει:

$\varepsilon_\lambda : (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(-1) + (\lambda^2 - 4\lambda + 3) \cdot 2 + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda = 1$ ή $\lambda = 5$. Η τιμή $\lambda = 1$ απορρίπτεται άρα $\lambda = 5$.

Γ4. Η ευθεία που προκύπτει απ' το Γ3 είναι η $\varepsilon_5 : 12x + 8y - 4 = 0$

Για $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ άρα τέμνει τον $y'y$ στο Β(0,2)

Για $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ άρα τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(\frac{1}{3}, 0)$

Το εμβαδό του αντίστοιχου τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ τ.μον.

ΘΕΜΑ Δ

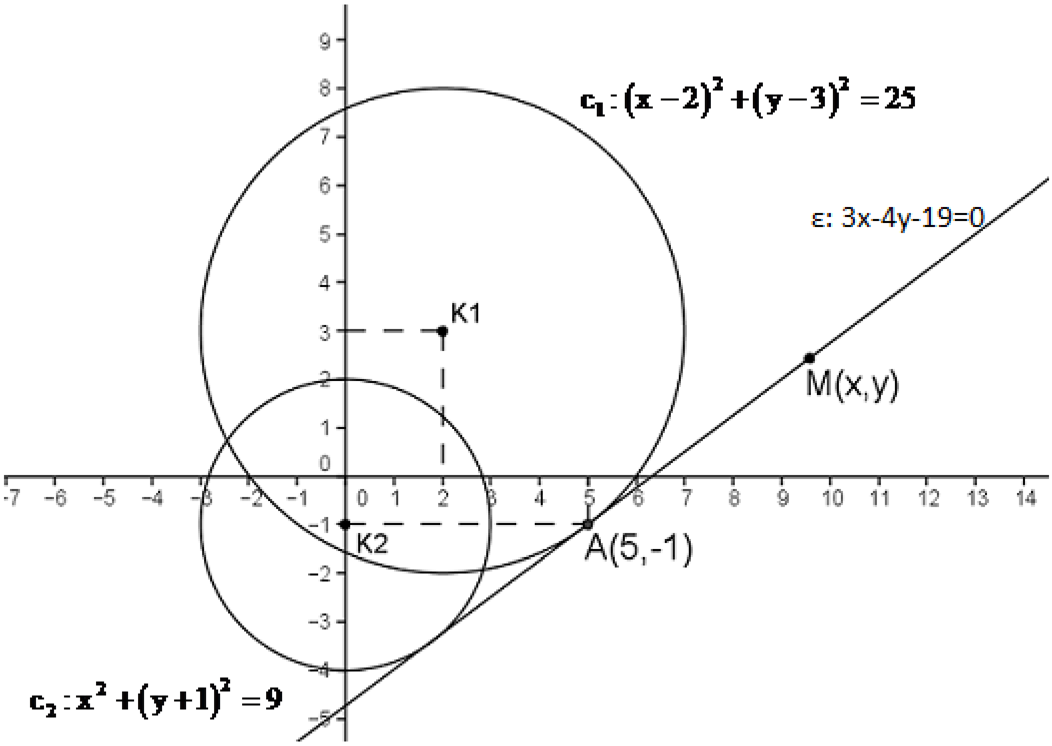
Δ1.

1.

Το σημείο Α(5,-1) επαληθεύει την εξίσωση του $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=25$.Αν $M(x,y)$ σημείο της ζητούμενης εφαπτομένης (ε) τότε:

$\overrightarrow{AM}=(x-5,y+1)\perp\overrightarrow{AK_1}=(-3,4)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AK_1}=0\Rightarrow$

$-3(x-5)+4(y+1)=0\Leftrightarrow \varepsilon:3x-4y-19=0$



2.Είναι: $d(K_2,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 0-4\cdot(-1)-19|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{15}{5}=3=\rho_2$ οπότε η (ε) εφάπτεται του C_2.

Δ2.

1.

Η $C_\alpha : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 4\alpha y + 5\alpha^2 - 1 = 0, \alpha \in R$ γράφεται :

$C_\alpha : (x^2 - 2\alpha x) + (y^2 - 4\alpha y) + 5\alpha^2 - 1 = 0, \alpha \in R \Leftrightarrow$

$C_\alpha : (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + (y^2 - 4\alpha y + 4\alpha^2) = 1 \Leftrightarrow$

$C_\alpha : (x - \alpha)^2 + (y - 2\alpha)^2 = 1$, άρα είναι κύκλος κέντρου Κ(α,2α) και ρ=1.

2.Αν $K(x, y)$ τότε $\left.\begin{matrix} x = \alpha \\ y = 2\alpha \end{matrix}\right| \Rightarrow y = 2x$.Η ευθεία αυτή είναι ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων.

3.Για να υπάρχει κύκλος που διέρχεται απ' το σημείο Α(1,1) πρέπει να επαληθεύεται απ' αυτό δηλ. πρέπει να είναι:

$(1 - \alpha)^2 + (1 - 2\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow 5\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = \frac{1}{5}$

Υπάρχουν λοιπόν 2 κύκλοι ου διέρχονται απ' το σημείο Α(1,1) οι C_1 και $C_{\frac{1}{5}}$.