ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **94**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων-Τριγωνομετρία **30-11-14**

Θέμα 1^{ο}:

A.i. Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους; **(7 μον.)**

ii. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιοδική; **(5 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$. **(8 μον.)**

B. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x+2y=1 \\ -2x-4y=2 \end{array}\right\}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

ii. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} (\eta\mu\theta)x+(\sigma\upsilon\nu\theta)y=5 \\ -(\sigma\upsilon\nu\theta)x+(\eta\mu\theta)y=3 \end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση. **Σ** **Λ**

iii. Η εξίσωση $\eta\mu x = \dfrac{\pi}{2}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

iv. $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Σ** **Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\dfrac{\pi}{2}$. **Σ** **Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^{ο}:

A. Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \lambda^2 x - y = \lambda \\ x-\lambda y = \lambda^2 \end{array}\right\}(\Sigma)$.

i. Να βρεθεί το πλήθος των λύσεών του για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **(7 μον.)**

ii. Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος, να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία το $A(x_0, y_0)$ ανήκει στη διχοτόμο πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου. **(6 μον.)**

Β. Μία βιοτεχνία παιχνιδιών κατασκευάζει ποδηλατάκια με τρεις ρόδες και αυτοκινητάκια με τέσσερις ρόδες. Για τα δύο παιχνίδια χρησιμοποιεί τις ίδιες ρόδες. Αυτό το μήνα παρέλαβε 470 ρόδες και θέλει να κατασκευάσει συνολικά 130 παιχνίδια. Πόσα θα κατασκευάσει από κάθε είδος; **(12 μον.)**

Θέμα 3^o:

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-1}{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}$. **(5 μον.)**

Β. i. Να αποδείξετε ότι:

$$-\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{4}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\right]-\eta\mu\frac{3\pi}{2}=3\eta\mu4x+1$$

(4 μον.)

ii. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=-\frac{3}{2}\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{4}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\right]-\eta\mu\frac{3\pi}{2}.$$

Να γίνει η μελέτη αυτής της συνάρτησης σε διάστημα μίας περιόδου. **(7 μον.)**

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\sigma\varphi x=-\sqrt{3}$ **ii.** $\eta\mu\left(2x+\dfrac{\pi}{7}\right)=\dfrac{1}{2}$ **iii.** $2\sigma\upsilon\nu^2x-9\sigma\upsilon\nu x+4=0$

(3x3=9 μον.)

Θέμα 4^o:

Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{matrix}(\varepsilon\varphi\theta)x+y=\dfrac{1}{3}\\ 3x+(\varepsilon\varphi\theta)y=\sigma\varphi\theta\end{matrix}\right\}(\Sigma)$ με $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Α. Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. **(12 μον.)**

Β. Να λυθεί το (Σ) για $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$. **(6 μον.)**

Γ. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ για την οποία το σύστημα έχει λύση την $(x,y)=\left(-\dfrac{4}{5},0\right)$. **(7 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις αx+βy=γ και $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών , τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή , πιο σύντομα , ένα γραμμικό σύστημα 2x2 και γράφουμε :

$$\left.\begin{aligned} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{aligned}\right\}$$

ii. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε x∈A να ισχύει:

α. x+ T∈A , x-T ∈A και

β. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

iii. $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega=1-\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu^2\omega=\frac{1+\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}-\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega=\frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Β. **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2ο:

Α. i. Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ). Είναι:

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+1=1-\lambda^3=(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda^2=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}=\lambda^4-\lambda=\lambda(\lambda^3-1)=\lambda(\lambda-1)(1+\lambda+\lambda^2)$$

*Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\underbrace{\left(1+\lambda+\lambda^2\right)}_{\Delta<0}\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{0}{(1-\lambda)\left(1+\lambda+\lambda^2\right)},\frac{\lambda(\lambda-1)\left(1+\lambda+\lambda^2\right)}{(1-\lambda)\left(1+\lambda+\lambda^2\right)}\right)$
$=(0,-\lambda)$.

*Αν D=0$\Leftrightarrow \lambda=1$ τότε το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ x-y=1\end{matrix}\right\}$.

Οπότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(x,x-1), x\in\mathbb{R}$.

ii. Για να ανήκει το $A(x_0,y_0)$ δηλαδή το $A(0,-\lambda)$ στη διχοτόμου του $1^{ου}$ και του $3^{ου}$ τεταρτημορίου πρέπει να επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή την y=x. Οπότε: $y_0=x_0 \Leftrightarrow -\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.

Β. Έστω x τα ποδηλατάκια και y τα αυτοκινητάκια. Τότε:

$$\left.\begin{matrix} x+y=130 \\ 3x+4y=470\end{matrix}\right\} \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -3x-3y=-390 \\ 3x+4y=470\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} y=80 \\ x=50\end{pmatrix}.$$

Άρα η βιοτεχνία θα κατασκευάσει 50ποδηλατάκια και 80 αυτοκινητάκια.

Θέμα 3^ο:

Α. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-1}{1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}\Leftrightarrow$

$(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x-1)(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1)=(1-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)(1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$

$(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)^2-1=1-(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu^2 x-1=1-\eta\mu^2 x-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow$

$0=1-1\Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει.

Β. i. $-\dfrac{3}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{4}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-4x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+4x\right)\right]-\eta\mu\dfrac{3\pi}{2}=$

$-\dfrac{3}{2}\varepsilon\varphi\left(2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-4x\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}+4x\right)\right]-\eta\mu\dfrac{3\pi}{2}=$

$\dfrac{3}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\cdot(\eta\mu 4x+\eta\mu 4x)+1=\dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot 2\eta\mu 4x+1=3\eta\mu 4x+1$

ii. Σύμφωνα με το i. ερώτημα είναι $f(x)=3ημ4x+1$.

* Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=\mathbb{R}$.

* Η f έχει σύνολο τιμών το $B=[-2,4]$.

* Η f είναι γν.αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$ και στο $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$, ενώ είναι γν.φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$.

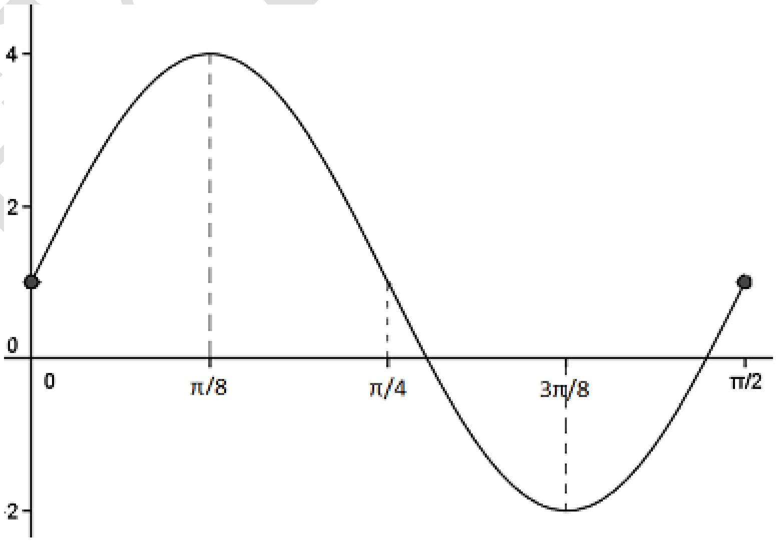
* Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 4 για $x=\frac{\pi}{8}$ και ολικό ελάχιστο το -2 για $x=\frac{3\pi}{8}$.

* Η f δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

* Η f είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

* Για τη γραφική παράσταση της f είναι $\beta=\frac{T}{4}=\frac{\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{\pi}{8}$ οπότε:

x	0	π/8	π/4	3π/8	π/2
4x	0	π/2	π	3π/2	2π
ημ4x	0	1	0	-1	0
3ημ4x	0	3	0	-3	0
3ημ4x+1	1	4	1	-2	1



Γ.i. $\sigma\varphi x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \sigma\varphi x=-\sigma\varphi\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}$.

ii. $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$2x+\frac{\pi}{7}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$ ή $2x+\frac{\pi}{7}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{42}\Leftrightarrow$ ή $2x=2\kappa\pi+\frac{29\pi}{42}\Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi+\frac{\pi}{84},\kappa\in\mathbb{Z}$ ή $x=\kappa\pi+\frac{29\pi}{84},\kappa\in\mathbb{Z}$

iii. $2\sigma\upsilon\nu^2x-9\sigma\upsilon\nu x+4=0\underset{\sigma\upsilon\nu x=\omega}{\overset{\text{Θέτουμε}}{\Leftrightarrow}}2\omega^2-9\omega+4=0$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81-32=49>0$.

Άρα έχει δύο άνισες λύσεις τις $\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{9\pm7}{4}$, άρα

$\omega_1=4$ ή $\omega_2=\frac{1}{2}$. Τότε:

Η $\sigma\upsilon\nu x=4$ είναι αδύνατη. Οπότε έχουμε:

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}$.

<u>Θέμα 4^{ο}:</u>

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{l}(\varepsilon\varphi\theta)x+y=\frac{1}{3}\\ 3x+(\varepsilon\varphi\theta)y=\sigma\varphi\theta\end{array}\right\}(\Sigma)$ με $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Α. Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ). Είναι:

$$D=\begin{vmatrix}\varepsilon\varphi\theta & 1\\ 3 & \varepsilon\varphi\theta\end{vmatrix}=\varepsilon\varphi^2\theta-3$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \sigma\varphi\theta & \varepsilon\varphi\theta\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\varepsilon\varphi\theta-\sigma\varphi\theta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} εφθ & \frac{1}{3} \\ 3 & σφθ \end{vmatrix} = εφθ \cdot σφθ - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 - 1 = 0$$

→Αν D=0 $\Leftrightarrow εφ^2θ - 3 = 0 \Leftrightarrow εφ^2θ = 3 \Leftrightarrow εφθ = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$εφθ = \sqrt{3} \Leftrightarrow εφθ = εφ\frac{π}{3} \Leftrightarrow θ = κπ + \frac{π}{3} \overset{θ\in\left(0,\frac{π}{2}\right)\cup\left(\frac{π}{2},π\right)}{\Leftrightarrow} θ = \frac{π}{3} \text{ ή } θ = \frac{2π}{3}$$

ή

$$εφθ = -\sqrt{3} \Leftrightarrow εφθ = εφ\left(-\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow θ = κπ - \frac{π}{3} \overset{θ\in\left(0,\frac{π}{2}\right)\cup\left(\frac{π}{2},π\right)}{\Leftrightarrow} θ = \frac{2π}{3}$$

*Αν $θ = \frac{π}{3}$ τότε D=0, $D_y = 0$ και $D_x = \frac{1}{3}εφ\frac{π}{3} - σφ\frac{π}{3} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

οπότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής :

$$(x,y) = \left(x, \frac{1}{3} - εφ\frac{π}{3}x\right) = \left(x, \frac{1}{3} - \sqrt{3}x\right), x \in \mathbb{R}.$$

*Αν $θ = \frac{2π}{3}$ τότε D=0, $D_y = 0$, και $D_x = \frac{1}{3}εφ\frac{2π}{3} - σφ\frac{2π}{3} =$

$$\frac{1}{3}\cdot εφ\left(π - \frac{π}{3}\right) - σφ\left(π - \frac{π}{3}\right) = -\frac{1}{3}εφ\frac{π}{3} + σφ\frac{π}{3} = -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

οπότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x,y) = \left(x, \frac{1}{3} - εφ\frac{2π}{3}x\right) = \left(x, \frac{1}{3} + \sqrt{3}x\right), x \in \mathbb{R}.$$

→Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow θ \neq \frac{π}{3}$ και $θ \neq \frac{2π}{3}$ τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{\frac{1}{3}εφθ - σφθ}{εφ^2θ - 3}, 0\right).$$

B. Για $θ = \frac{3π}{4}$ είναι : $εφ\frac{3π}{4} = εφ\left(π - \frac{π}{4}\right) = -εφ\frac{π}{4} = -1$ και

$σφ\frac{3π}{4} = σφ\left(π - \frac{π}{4}\right) = -σφ\frac{π}{4} = -1$ οπότε το (Σ) έχει μοναδική

$$\text{λύση την } (x,y)=\left(\frac{\frac{1}{3}\text{εφ}\frac{3\pi}{4}-\text{σφ}\frac{3\pi}{4}}{\text{εφ}^2\frac{3\pi}{4}-3},0\right)=\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot(-1)+1}{1-3},0\right)=\left(-\frac{1}{3},0\right).$$

Γ. Για να έχει το (Σ) λύση την $(x,y)=\left(-\frac{4}{5},0\right)$ πρέπει :

$$\frac{\frac{1}{3}\text{εφθ}-\text{σφθ}}{\text{εφ}^2\text{θ}-3}=-\frac{4}{5}\Leftrightarrow -4\text{εφ}^2\text{θ}+12=\frac{5}{3}\text{εφθ}-5\text{σφθ}\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}$$

$$-12\text{εφ}^2\text{θ}+36=5\text{εφθ}-15\text{σφθ}\Leftrightarrow -12\text{εφ}^2\text{θ}+36=5\text{εφθ}-15\frac{1}{\text{εφθ}}\overset{\cdot\text{εφθ}}{\Leftrightarrow}$$

$$-12\text{εφ}^3\text{θ}+36\text{εφθ}=5\text{εφ}^2\text{θ}-15\underset{\text{εφθ}=\omega}{\overset{\text{Θέτουμε}}{\Leftrightarrow}}12\omega^3+5\omega^2-36\omega-15=0\Leftrightarrow$$

$$\omega^2(12\omega+5)-3(12\omega+5)=0\Leftrightarrow(12\omega+5)(\omega^2-3)=0\Leftrightarrow$$

$$\omega=-\frac{5}{12}\ \text{ή}\ \omega=\pm\sqrt{3}$$

Οπότε έχουμε $\boldsymbol{\text{εφθ}=-\frac{5}{12}}$ ή $\text{εφθ}=\pm\sqrt{3}$ που είναι αδύνατη σύμφωνα με το (Α) ερώτημα, εφόσον το (Σ) έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι $\boldsymbol{\text{σφθ}=-\frac{12}{5}}$. Επίσης είναι:

$$\text{συν}^2\text{θ}=\frac{1}{1+\text{εφ}^2\text{θ}}=\frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{25}{144}}=\frac{144}{169}\Leftrightarrow\text{συνθ}=\pm\frac{12}{13}$$

$$\underset{\text{εφθ}=-\frac{5}{12}\text{ άρα } \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow}}\ \boldsymbol{\text{συνθ}=-\frac{12}{13}}.$$

$$\text{Τέλος, εφθ}=\frac{\text{ημθ}}{\text{συνθ}}\Leftrightarrow\text{ημθ}=\text{εφθ}\cdot\text{συνθ}\Leftrightarrow\text{ημθ}=-\frac{5}{12}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\text{ημθ}=\frac{5}{13}}.$$