# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**94**

**Ον/μο:………………..** **Β΄Λυκείου**

**Ύλη:Διανύσματα- Ευθεία – Κωνικές τομές** **Θετ-Τεχν Κατ.**

**26-01-14**

## ΘΕΜΑ 1ο:

**Α.1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α($x_0$,$y_0$) και έχει συντελεστή διευθύνσεως λ είναι η $\varepsilon : y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ **(μον.7)**

**Α.2.** Να βρείτε το είδος της γραμμής που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ για τις διάφορες τιμές των Α , Β ,Γ **(μον.8)**

**Β.** Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

**1)** Αν $\left|\vec{\alpha}\right| = \lambda \cdot \left|\vec{\beta}\right|$ , $\lambda \in R$ τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ **Σ Λ**

**2) Αν** $\vec{\alpha} = (2x, 4)$ **,** $\vec{\beta} = (x^3, 2)$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $x = \pm 1$ **Σ Λ**

**3)** Αν $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad \lambda - 1)$ και $\vec{\alpha} // x'x$ τότε λ=1 **Σ Λ**

**4)** Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(2 , -7) και Β(3,-7) έχει γωνία ω=0 **Σ Λ**

**5)** Για λ=1 η ευθεία $\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + \lambda y + 3\lambda + 1 = 0$ είναι κα΄θετη στην $\varepsilon_2 : \lambda x + 3y - 2\lambda + 1 = 0$ **Σ Λ**

**6)** Για λ=14 οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x - 3y + \lambda = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x - 3y + 1 = 0$ απέχουν μεταξύ τους $\sqrt{13}$ **Σ Λ**

**7)** Η εστία της παραβολής $x^2 = -y$ είναι η $E\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ **Σ Λ**

**8)** Ο κύκλος $C : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$ έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $4x - 5y + 11 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία Α(2,1) και Β(-1,4) **Σ Λ**

**9)** Η έλλειψη με εστίες $E'(-4, 0), \quad E(4, 0)$ και 2α=10 είναι η $25x^2 + 9y^2 = 1$ **Σ Λ**

**10)** Η υπερβολή $4y^2 - 9x^2 = 36$ έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm\frac{2}{3}x$ **Σ Λ**

**(μον.10)**

**ΘΕΜΑ 2ο:**

**Β1.** Εστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Να δείξετε ότι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}}{\vec{\alpha}^2}\right)\cdot\vec{\alpha}$ **(μον.6)**

**Β2.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(4,2)$.

**α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$, όπου $\vec{\gamma}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$. **(μον.7)**

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon_1$, η οποία διέρχεται από το σημείο Ρ(2014,2014) και να είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$. **(μον.5)**

**γ.** Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\delta}=(5,2)$ και η ευθεία $\varepsilon_2:\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}\right|x+\left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}\right|y-\lambda=0$, $\lambda\in R$. Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία ($\varepsilon_2$) να σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 10 τ.μονάδες. **(μον.7)**

**ΘΕΜΑ 3ο:**

Έστω $E\left(\sqrt{2},0\right)$ και $E'\left(-\sqrt{2},0\right)$ δύο σημεία του άξονα x'x. Αν για τα σημεία Μ του επιπέδου ισχύουν:

$\left|(ME)+(ME')\right|^2=64$ και $\left|(ME)^2-(ME')^2\right|=16$, τότε:

**Γ1.** Να δείξετε ότι τα σημεία Μ ανήκουν σε δύο κωνικές τομές, από τις οποίες η μία είναι έλλειψη με εξίσωση $c_1:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{14}=1$ και η άλλη ισοσκελής υπερβολή με εξίσωση: $c_2:x^2-y^2=1$ **(μον.7)**

**Γ2.** Να βρείτε τα σημεία τομής των δύο αυτών κωνικών τομών. **(μον.5)**

**Γ3.** Αν $\varepsilon_1$ η εκκεντρότητα της έλλειψης και $\varepsilon_2$ η εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής (του ερωτήματος Α) να βρείτε το λόγο $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. **(μον.5)**

**Γ4.** Μια ευθεία $\delta_1$ με συντελεστή διεύθυνσης λ>0, διέρχεται από την εστία Ε της παραπάνω έλλειψης και τέμνει την ευθεία $\delta_2: x=4\sqrt{2}$ στο σημείο Ρ. Αν (ΟΕΡ)=3 τ.μον. να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\delta_1$. **(μον.8)**

**ΘΕΜΑ 4$^{ο}$:**

Θεωρούμε τα σημεία Α(λ,0), Β(0,2-λ), Γ(λ,2-λ) όπου $\lambda \in R$ και $0<\lambda<2$.

**Δ1.** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο. **(μον.3)**

**Δ2.** Να δείξετε ότι η ευθεία ε, που διέρχεται από το Γ και είναι κάθετηστην ΑΒ, έχει εξίσωση $\lambda x+(\lambda-2)y+4-4\lambda=0$ **(1)**, $\lambda \in R$, $0<\lambda<2$. **(μον.5)**

**Δ3.** Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) του προηγούμενου ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. **(μον.4)**

**Δ4.** Έστω C ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Ο, Α και Β.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ και την ακτίνα του R, συναρτήσει του λ. **(μον.3)**

**β)**Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C. **(μον.2)**

**γ)**Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση του ερωτήματος Δ4) β), για $\lambda \in R$ και $0<\lambda<2$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία και να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων αυτών. **(μον.4)**

**δ)**Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του Κ. **(μον.4)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

### ΘΕΜΑ 1ο:

**Α1.** Θεωρία **Α2.** Θεωρία

**Α.3. 1 Λ , 2 Λ, 3 Σ, 4 Σ, 5 Λ, 6 Σ, 7 Σ, 8 Σ, 9 Λ, 10 Λ**

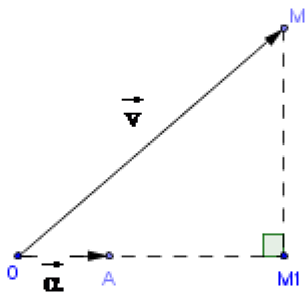
### ΘΕΜΑ 2ο:

**Β.1.**Είναι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\nu}=\lambda\cdot\vec{\alpha}$ **(1)** και η $\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$ γράφεται:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}=\vec{\alpha}\cdot\lambda\,\vec{\alpha}$ δηλαδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}=\lambda\,\vec{\alpha}^2\Rightarrow\lambda=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}}{\alpha^2}$

οπότε η ισότητα (1)

γράφεται: $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\nu}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu}}{\vec{\alpha}^2}\right)\cdot\vec{\alpha}$




**Β.2.α)** Είναι :

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(-1,2)+(4,2)=(3,4)$ ,

$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-1,2)-(4,2)=(-5,0)$ .Σύμφωνα με το Β.1) έχουμε:

$$\vec{\gamma}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\left(\frac{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})}{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2}\right)\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=$$

$$=\frac{(-5)\cdot3+0\cdot4}{(-5)^2+0^2}\cdot(-5,0)=-\frac{15}{25}(-5,0)\text{ άρα }\vec{\gamma}=(3,0)$$

**β)** Το $\vec{\gamma}$ είναι παράλληλο στον x΄x επομένως η καθετή του ευθεία είναι κατακόρυφη .Άρα έχει εξίσωση $\varepsilon: x=2014$

**γ)** Είναι

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}=(-1,2)+(4,2)+(5,2)=(8,6)$ με $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\delta}\right|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$ και
- $\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}=(4,2)+(3,0)-(5,2)=(2,0)$ με $\left|\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}\right|=\sqrt{2^2+0^2}=2$

Η $\varepsilon_2$ γράφεται : $\varepsilon_2: 10x + 2y - \lambda = 0 \quad (1)$

Για $x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = \dfrac{\lambda}{2}$ δηλ η $\varepsilon_2$ τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0, \dfrac{\lambda}{2}\right)$

Για $y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = \dfrac{\lambda}{10}$ δηλ η $\varepsilon_2$ τέμνει τον $x'x$ στο $B\left(\dfrac{\lambda}{10}, 0\right)$

Έχουμε ότι $E_{OAB} = 10 \Rightarrow \dfrac{1}{2}(OA)(OB) = 10 \Rightarrow$

$\left|\dfrac{\lambda}{2}\right| \cdot \left|\dfrac{\lambda}{10}\right| = 20 \Leftrightarrow |\lambda|^2 = 20^2 \Leftrightarrow |\lambda| = 20 \Leftrightarrow$ λ=-20 ή λ=20

**ΘΕΜΑ 3ο:**

**Γ.1.** • Αφού $|(ME) + (ME')|^2 = 64 \Rightarrow |(ME) + (ME')| = 8 > (E'E) = 2\sqrt{2}$
άρα τα σημεία Μ ανήκουν στην έλλειψη με 2α=8 δηλ. α=4 ,
$\gamma = \sqrt{2}$ και $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4^2 - \sqrt{2}^2 = 14$ . Η εξίσωση της είναι

$$\boxed{C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{14} = 1}$$

• Αφού $\left|(ME)^2 - (ME')^2\right| = 16 \Rightarrow$

$|((ME) - (ME'))((ME) + (ME')| = 16 \Rightarrow |(ME) - (ME')| \cdot 8 = 16 \Rightarrow$

$|(ME) - (ME')| = 2 < (E'E) = 2\sqrt{2}$ άρα τα σημεία Μ ανήκουν στην υπερβολή με 2α=2 δηλ α=1 , $\gamma = \sqrt{2}$ και

$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 1$ .Η εξίσωση της είναι $\boxed{C_2: x^2 - y^2 = 1}$
(ισοσκελής)

**Γ.2.** Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων τους .

Από την $C_2 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \quad (1)$

Η $C_1$ γίνεται : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x^2 - 1}{14} = 1 \Leftrightarrow 14x^2 + 16x^2 - 16 = 14 \cdot 16$

$30x^2 = 14 \cdot 16 + 16 \Leftrightarrow 30x^2 = 15 \cdot 16 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Από την (1) $\Leftrightarrow y^2 = 8 - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7}$

Οι $C_1$ και $C_2$ έχουν τέσσερα κοινά σημεία τα :

$A(2\sqrt{2},\sqrt{7})$ , $B(-2\sqrt{2},\sqrt{7})$ , $\Gamma(-2\sqrt{2},-\sqrt{7})$ , $\Delta\left(4\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)$

**Γ.3.** Είναι $\varepsilon_1=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ , $\varepsilon_2=\sqrt{2}$ άρα $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}}\Rightarrow \boxed{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\dfrac{1}{4}}$

**Γ.4.** Είναι $\delta_1: y-0=\lambda(x-\sqrt{2})$

δηλ. $y=\lambda x-\lambda\sqrt{2}$ . Άρα

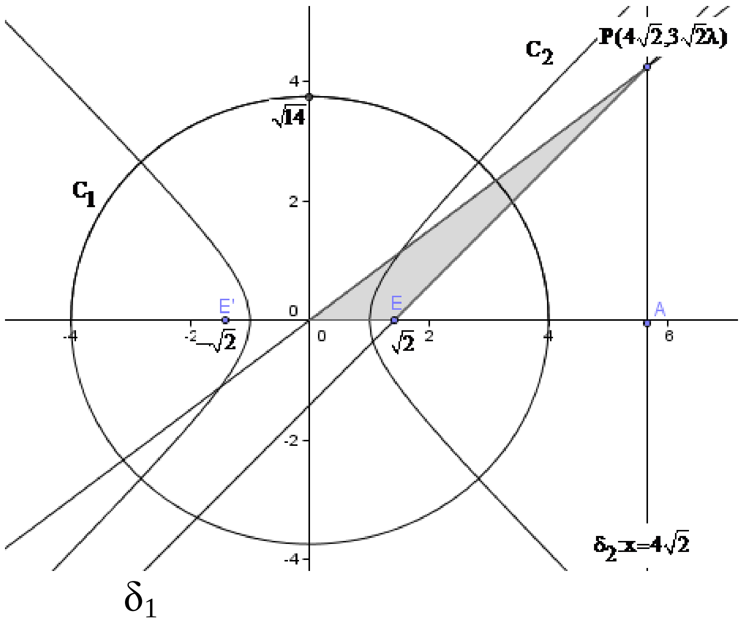
$P(4\sqrt{2},3\sqrt{2}\lambda)$ .

Αφού $(OEP)=3\Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}(OE)(AP)=3\Rightarrow$

$\dfrac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\lambda}{2}=3\Rightarrow\lambda=1$

Άρα $\delta_1: y=x-\sqrt{2}$

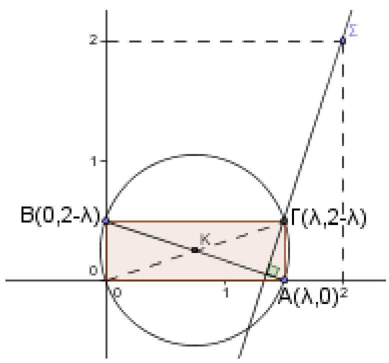



## ΘΕΜΑ 4ο:

**Δ.1.** Επειδή $x_A=x_\Gamma=\lambda$ η ΑΒ είναι κατακόρυφη

Επειδή $y_B=y_\Gamma=2-\lambda$ η ΒΓ είναι οριζόντια

Άρα το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο .




**Δ.2.** Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{2-\lambda}{-\lambda}=\dfrac{\lambda-2}{\lambda}$ οπότε

$$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AB}=-1\Rightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{\lambda_{AB}}\Rightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{\lambda}{2-\lambda}\ \text{και}$$

$$\text{άρα } \varepsilon: y-(2-\lambda)=\frac{\lambda}{2-\lambda}(x-\lambda)\Leftrightarrow(2-\lambda)y-(2-\lambda)^2=\lambda x-\lambda^2\Leftrightarrow$$

$$2y-\lambda y-4+4\lambda-\lambda^2=\lambda x-\lambda^2\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon:\lambda x+(\lambda-2)y+4-4\lambda=0}$$

**Δ.3.** Η $\varepsilon: \lambda x + \lambda y - 2y + 4 - 4\lambda = 0$ ισχύει $\forall \lambda \in (0,2)$

δηλ. $(x+y-4)\cdot\lambda + 4 - 2y = 0, \quad \forall\lambda \Leftrightarrow x+y-4=0$ και

$4-2y=0 \Leftrightarrow \boxed{(x,y)=(2,2)}$ το σταθερό σημείο από το οποίο

διέρχεται η ε.

Δ.4. **α)** Είναι $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2}\right)$ και

$$\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + (2-\lambda)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2\lambda^2 - 4\lambda + 4}}{2}$$

**β)** Είναι $C: \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{2-\lambda}{2}\right)^2 = \frac{\lambda^2 + (2-\lambda)^2}{4}$

**γ)** Παρατηρώ !!! ότι τα σημεία O(0,0) και Δ(1,1) επαληθεύουν την εξίσωση C οπότε όλοι οι κύκλοι διέρχονται από αυτά .

**δ)** Έστω $\left.\begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{2-\lambda}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{\lambda}{2} \\ y = 1 - \frac{\lambda}{2} \end{array}\right| \Rightarrow y = 1 - x \Leftrightarrow \delta: x + y - 1 = 0$

με $0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$ ο γ.τ των Κ λοιπόν είναι

το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα της δ .