ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **93**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων **05-10-14**

Θέμα 1ο:

A.i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή. **(4 μον.)**

ii. Ποιες είναι οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ; **(5 μον.)**

iii. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in A$; **(6 μον.)**

B. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2x+2y=4 \end{matrix}\right\}$ είναι αδύνατο. **Σ** **Λ**

ii. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει άπειρες λύσεις, τότε $D=0,\ D_x=0$ και $D_y\neq 0$. **Σ** **Λ**

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x+3)-5$ είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά 3 μονάδες δεξιά και 5 μονάδες κάτω. **Σ** **Λ**

iv. Η συνάρτηση $f(x)=-3x+5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ** **Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+3x-7$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ** **Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο:

A. Δίνεται η ευθεία $\alpha x+\beta y=5$. Αν γνωρίζετε ότι η ευθεία διέρχεται από τα σημεία A(1,2) και B(-1,3), να υπολογίσετε τα α και β. **(7 μον.)**

Β. Δίνεται το σύστημα $\left.\begin{array}{l}(\lambda-1)x+2\lambda y=-2\\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-1\end{array}\right\}(\Sigma)$ και D η ορίζουσα των συντελεστών του.

Αν η εξίσωση $x^2+5(D-1)x-6(D-1)^2=0$ έχει μία διπλή λύση:

i. Να βρείτε τις τιμές του λ. **(8 μον.)**

ii. Αν λ=0 να λύσετε το σύστημα. **(5 μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy+y^2=1\\ x-2y=2\end{array}\right\}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. **(5 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη, περιττή και διέρχεται από το σημείο Α(2,-4).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της. **(4 μον.)**

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(5x+9)<f(-3x+2)$. **(3 μον.)**

iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2014)$, $f(2015)$. **(3 μον.)**

Β . i. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$g(x)=-\dfrac{2}{x^2+9}$. **(5 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν η $h(x)=\dfrac{-x^3-5x}{4-x^2}$ είναι άρτια ή περιττή. **(5 μον.)**

iii. Αν $\varphi(x)=3x^2+6$, να βρείτε την ω(x) που είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά 2 μονάδες αριστερά και 3 μονάδες κάτω. **(5 μον.)**

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Α.i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x=1 και για x=-1. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$g(x)=\dfrac{4x^4-x^2+4}{x^4+1}$. **(4 μον.)**

iii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$h(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x^4+1}$. **(4 μον.)**

Β. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)+4f(-x)=x^5+6x\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x)+4f(x)=-x^5-6x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f. **(5 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

● Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

→ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .

→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\frac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

ii. Οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος 2x2 είναι :
- ∗ Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών .
- ∗ Μέθοδος της αντικατάστασης .
- ∗ Μέθοδος σύγκρισης .
- ∗ Μέθοδος των οριζουσών .
- ∗ Γραφική επίλυση .

iii. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

Β. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2°:

A. Εφόσον η ευθεία $\alpha x+\beta y=5$ διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(-1,3) θα επαληθεύεται από αυτά. Οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cdot 1+\beta\cdot 2=5\\ \alpha\cdot(-1)+\beta\cdot 3=5\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha+2\beta=5\\ -\alpha+3\beta=5\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}5\beta=10\\ \alpha+2\beta=5\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=2\\ \alpha=1\end{array}\right\}$$

B. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l}(\lambda-1)x+2\lambda y=-2\\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-1\end{array}\right\}(\Sigma)$

i. Εφόσον η εξίσωση $x^2+5(D-1)x-6(D-1)^2=0$ έχει μία διπλή λύση, θα έχει :

$$\Delta=0\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\left[5(D-1)\right]^2-4\left[-6(D-1)^2\right]=0\Leftrightarrow$$

$$25(D-1)^2+26(D-1)^2=0\Leftrightarrow 51(D-1)^2=0\Leftrightarrow(D-1)^2=0\Leftrightarrow$$

D=1.

Όμως $D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\lambda\\ 2\lambda & \lambda\text{-}1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4\lambda^2=\lambda^2-2\lambda+1-4\lambda^2=$

$-3\lambda^2-2\lambda+1$

Πρέπει $D=1\Leftrightarrow-3\lambda^2-2\lambda+1=1\Leftrightarrow-3\lambda^2-2\lambda=0\Leftrightarrow-\lambda(3\lambda+2)=0$

$$\Leftrightarrow\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-\frac{2}{3}.$$

ii. Για λ=0 το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{array}{l}-x=-2\\ -y=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x=2\\ y=1\end{pmatrix}$ άρα (x,y)=(2,1).

Γ. $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy+y^2=1\\ x-2y=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}(x-y)^2=1\\ x=2+2y\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-y=1\\ x-2y=2\end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix}x-y=-1\\ x-2y=2\end{pmatrix}$

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος ανάγεται στη λύση δύο επιμέρους γραμμικών συστημάτων :

$$(\Sigma_1):\left.\begin{array}{l}x-y=1\\ x-2y=2\end{array}\right\}\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}-x+y=-1\\ x-2y=2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}-y=1\\ x-y=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y=-1\\ x=0\end{pmatrix}$$

$$(\Sigma_2): \left.\begin{matrix} x-y=-1 \\ x-2y=2 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -x+y=1 \\ x-2y=2 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -y=3 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=-3 \\ x=-4 \end{pmatrix}$$

Άρα οι ευθείες του (Σ_1) τέμνονται στο (0,-1) και οι ευθείες του (Σ_2) τέμνονται στο (-4,-3).

<u>Θέμα 3°:</u>

A. i. Εφόσον η f είναι περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της που είναι όλο το $\mathbb{R}$, θα διέρχεται από το O(0,0). Επίσης η f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται και από το A(2,-4) άρα θα είναι γνησίως φθίνουσα διότι: 0<2 και 0>-4 δηλαδή f(0)>f(2).

ii. $f(5x+9)<f(-3x+2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}5x+9>-3x+2\Leftrightarrow 8x>-7\Leftrightarrow x>-\frac{7}{8}$.

iii. Έχουμε: $2014<2015\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(2014)>f(2015)$.

B. i. Έχουμε τη συνάρτηση $g(x)=-\frac{2}{x^2+9}$.

Για να ορίζεται η g πρέπει $x^2+9\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $A_g=\mathbb{R}$. Τότε:

$$x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2+9\geq 9\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+9}\leq\frac{1}{9}\overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow}-\frac{2}{x^2+9}\geq-\frac{2}{9}\Leftrightarrow g(x)\geq-\frac{2}{9}.$$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $-\frac{2}{9}$ για x=0. Η g δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

ii. Έχουμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{-x^3-5x}{4-x^2}$.

Για να ορίζεται η h πρέπει $4-x^2\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 4\Leftrightarrow x\neq\pm 2$.
Επομένως $A_h=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$. Οπότε $\forall x\in A_h$ το $-x\in A_h$.

Επίσης, $h(-x)=\frac{-(-x)^3-5(-x)}{4-(-x)^2}=\frac{x^3+5x}{4-x^2}=-\frac{-x^3-5x}{4-x^2}=-h(x)$

δηλαδή η h είναι περιττή.

iii. Η $\varphi(x)=3x^2+6$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Για την ω(x) που είναι μετατόπιση της φ κατά 2 μονάδες αριστερά και 3 μονάδες κάτω έχουμε:

$$\omega(x)=\varphi(x+2)-3=3(x+2)^2+6-3=3(x+2)^2+3=$$

$$3(x^2+4x+4)+3=3x^2+12x+12+3=3x^2+12x+15=$$

$$3(x^2+4x+5),x\in\mathbb{R}.$$

<u>Θέμα 4ο:</u>

A. i. Για να παρουσιάζει η f μέγιστο για x=1 πρέπει:

$$f(x)\le f(1)\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4+1}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2\le x^4+1\Leftrightarrow x^4-2x^2+1\ge 0\Leftrightarrow$$

$(x^2+1)^2\ge 0$ που ισχύει.

Για να παρουσιάζει η f μέγιστο για x=-1 πρέπει:

$$f(x)\le f(-1)\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4+1}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2\le x^4+1\Leftrightarrow x^4-2x^2+1\ge 0\Leftrightarrow$$

$(x^2+1)^2\ge 0$ που ισχύει.

ii. Για την $g(x)=\dfrac{4x^4-x^2+4}{x^4+1}$ έχουμε:

$$g(x)=\frac{4x^4-x^2+4}{x^4+1}=\frac{4x^4+4}{x^4+1}-\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{4(x^4+1)}{x^4+1}-f(x)=$$

$$4-f(x)$$

Από το i ερώτημα γνωρίζουμε ότι $f(x)\le\dfrac{1}{2}$ οπότε:

$$f(x)\le\frac{1}{2}\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}-f(x)\ge-\frac{1}{2}\overset{+4}{\Leftrightarrow}4-f(x)\ge 4-\frac{1}{2}\Leftrightarrow g(x)\ge\frac{7}{2}$$

Δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο το $\dfrac{7}{2}$ για x=1 και x=-1.

iii. Ομοίως έχουμε την $h(x)=\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}$ οπότε:

$$h(x)=\frac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+1}=\frac{x^4+1}{x^4+1}+\frac{2x^2}{x^4+1}=1+2f(x)$$

Από το i ερώτημα γνωρίζουμε ότι $f(x)\le\dfrac{1}{2}$ οπότε:

$$f(x)\le\frac{1}{2}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}2f(x)\le 1\overset{+1}{\Leftrightarrow}2f(x)+1\le 2\Leftrightarrow h(x)\le 2$$

Δηλαδή η h παρουσιάζει μέγιστο το 2 για x=1 και x=-1.

B. i. Έχουμε ότι ισχύει $f(x)+4f(-x)=x^5+6x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε αυτή η σχέση θα ισχύει και για το –x. Αντικαθιστώντας λοιπόν, όπου x το –x, έχουμε:

$f(-x)+4f(x)=-x^5-6x$.

ii. Για να βρούμε τον τύπο της f θα λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} f(x)+4f(-x)&=x^5+6x\\ 4f(x)+f(-x)&=-x^5-6x\end{aligned}\right\}(\Sigma)$$

Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος είναι:

$D=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1-16=-15\ne 0$, οπότε το (Σ) έχει μοναδική λύση.

Βρίσκουμε την ορίζουσα $D_{f(x)}$.

$$D_{f(x)}=\begin{vmatrix}x^5+6x & 4\\ -x^5-6x & 1\end{vmatrix}=x^5+6x+4x^5+24x=5x^5+30x=5x(x^4+6)$$

Τότε για την f έχουμε:

$$f(x)=\frac{D_{f(x)}}{D}=\frac{5x(x^4+6)}{-15}=-\frac{x^5+6x}{3}$$

iii. Η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως $\forall x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$.

Επίσης, είναι: $f(-x)=-\dfrac{(-x)^5-6x}{3}=\dfrac{x^5+6x}{3}=-f(x)$.

Άρα η f είναι περιττή.