ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

92

Ύλη:Διανύσματα **Β΄ Λυκείου**

Ον/μο:………………… **Θετ.-Τεχν. Κατ.**

4 -10– 2015

<u>ΘΕΜΑ 1^0:</u>

Α . 1. Να σχηματίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και τη διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

2. Να πάρετε τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

3. Να σχεδιάσετε τη γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και να γράψετε τις τιμές που αυτή παίρνει.

4. Γράψτε την τριγωνική ανισότητα για το μέτρο του αθροίσματος των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Στη συνέχεια συμπληρώστε τα κενά :

i) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε ……………..

ii) Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|$ τότε…………….

(Μον. 16)

Β. Δίνονται τέσσερα σημεία Α , Β ,Γ και Δ και έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο.

Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αν :

1. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ **2.** $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

3. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

(Μον. 9)

ΘΕΜΑ 2^0:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό ή λάθος

1. Αν Μ μέσον του τμήματος ΑΒ , τότε : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ Σ Λ
2. Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ Σ Λ
3. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\lambda| \cdot |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = -|\lambda| \cdot \vec{\beta}$ Σ Λ
4. Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ τότε $\lambda = \mu$ Σ Λ
5. Το μηδενικό διάνυσμα είναι ομόρροπο σε κάθε άλλο διάνυσμα Σ Λ

(Μον.10)

Β. Αν $\vec{AK}+3\vec{BK}-2\vec{B\Lambda}=\vec{B\Lambda}+3\vec{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ , Λ και Μ είναι συνευθειακά . **(Μον.7)**

Γ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ , αντιστοίχως ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ , να αποδείξετε ότι $\vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta}=4\vec{MN}$. **(Μον.8)**

ΘΕΜΑ 3^0:

Α. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda^2-2\lambda,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(\kappa^2-4\kappa+5,\mu-1)$
Να βρείτε τα κ ,λ , μ ώστε
1. τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.
2. το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.
3. $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} /\!/ y'y$. **(Μον.9)**

Β. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda-2,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,4-2\lambda)$
1. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} /\!/ \vec{\beta}$. **(Μον.6)**
2. Για λ=5 να βρείτε το διάνυσμα που να είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο διπλάσιο του $\vec{\beta}$. **(Μον.5)**
3. Έστω τα σημεία Α(1,μ) και Β(3,μ-2).Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ του διανύσματος $\vec{AB}$ καθώς και τη γωνία του.

(Μον.5)

ΘΕΜΑ 4^0:

Α. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$=.....

2. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$..........

3. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$...........

4. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$........

5. $\vec{i}\cdot\vec{j}$=..., $\vec{i}^2=$....

6. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$=.............

7. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=$......

8 Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όχι // στον $y'y$ τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1\Leftrightarrow$...........

9. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$) και $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τότε $συν(\vec{\alpha},\vec{\beta})=$.........

10. $\vec{\alpha}\cdot προβ_{\vec{\alpha}}\vec{v}$=..............., $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$

(Μον.10)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ερωτήσεις με Σ ή Λ.

1. Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ Σ Λ

2. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}$ Σ Λ

3. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\leq\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ Σ Λ

4. $\vec{\alpha}\cdot(\lambda\cdot\vec{\beta})=\lambda\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ Σ Λ

5. $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ Σ Λ

6. Αν $\vec{\alpha}\,//\vec{\beta}$ τότε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ Σ Λ

(Μον.6)

Γ. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , με $A(1,2)$, $B(2,2+\sqrt{3})$, $\Gamma(-2\sqrt{3},8-\sqrt{3})$
Αν ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ

1. Να υπολογίσετε το $\vec{AB}\cdot\vec{AM}$

2. Να υπολογίσετε τα $|\vec{AB}|$ και $|\vec{AM}|$

3. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BAM}$. **(Μον.9)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ 1^0:

Α. 1. Σχολικό σελ. 16 και 18.
2. Σχολικό σελ. 17.
3. Σχολικό σελ. 14.
4. Σχολικό σελ. 19.
i) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$
ii) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Β. 1. Έχουμε : $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δηλ $BA=//\Gamma\Delta$ οπότε
το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο .

2. Έχουμε : $\left|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\beta}-\vec{\delta}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}\right| \Leftrightarrow$
$\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|=\left|\overrightarrow{\Delta B}\right|$ δηλ . οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι ίσες .

3. Έχουμε : $\left.\begin{array}{l}\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}\\ \left|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\beta}-\vec{\delta}\right|\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{ΑΒΓΔ παρ/μο}\\ \text{διαγώνιοι ίσες}\end{array}\right| \Rightarrow$ ΑΒΓΔ ορθογώνιο .

ΘΕΜΑ 2^0:

Α. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Λ , 5Σ .

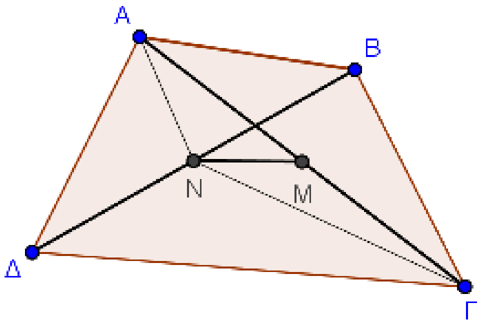
Β. Έχουμε : $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$ οπότε (σημείο αν. το Α)
$\overrightarrow{AK}+3\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$4\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{A\Lambda}+4\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AK}-4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Lambda}-\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$
$4\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{M\Lambda} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Lambda}//\overrightarrow{MK}$ με κοινό άκρο το Μ .
Άρα τα Κ , Λ , Μ συνευθειακά .

Γ. Είναι : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta} \overset{\overset{\triangle}{AB\Delta}}{\underset{\underset{\triangle}{B\Gamma\Delta}}{=}}$

$= 2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{\Gamma N}=2\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{\Gamma N}\right)=$

$= -2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{N\Gamma}\right)\overset{\overset{\triangle}{NA\Gamma}}{=} -2\cdot 2\overrightarrow{NM}=$

$= 4\overrightarrow{MN}$



ΘΕΜΑ 3^0:

Α. 1. $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίθετα άρα : $\begin{aligned} \lambda^2-2\lambda &= -\kappa^2+4\kappa-5 \quad (1) \\ \lambda &= -\mu+1 \quad (2) \end{aligned}$

Από (1) $\Rightarrow \left(\lambda^2-2\lambda+1\right)+\left(\kappa^2-4\kappa+4\right)=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda-1)^2+(\kappa-2)^2=0 \Leftrightarrow$ $\lambda=1$ και $\kappa=2$.

Η (2) $\Rightarrow 1=-\mu+1 \Leftrightarrow$ $\mu=0$.

2. Είναι: $\vec{\alpha}\neq 0$ όταν δεν είναι συγχρόνως $\lambda^2-2\lambda=0$ και $\lambda=0$ άρα $\lambda=0$.
Το $\vec{\alpha}$ λοιπόν δεν είναι μηδενικό διάνυσμα αν $\lambda\neq 0$.

3. Είναι $\vec{\alpha}\neq 0$ και $\vec{\alpha}//y'y$ όταν $\lambda\neq 0$ και $\lambda^2-2\lambda=0$ δηλ. αν $\lambda=2$.

Β. 1.είναι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$ όταν

$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -8 & 4-2\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(4-2\lambda)+8=0 \Leftrightarrow 4\lambda-2\lambda^2-8+4\lambda+8=0$

$\Leftrightarrow 2\lambda^2-8\lambda=0 \quad 2\lambda(\lambda-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=4$

2. Αν λ=5 τότε $\vec{\alpha}=(3,1)$ και $\vec{\beta}=(-8,-6)$.

Έστω $\vec{\nu}$ ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ οπότε $\vec{\nu}=\lambda\cdot(3,1)=(3\lambda,\lambda),\quad \lambda>0$

και $\left|\vec{\nu}\right|=2\left|\vec{\beta}\right|$ δηλ $\sqrt{(3\lambda)^2+\lambda^2}=2\cdot\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}\Leftrightarrow$

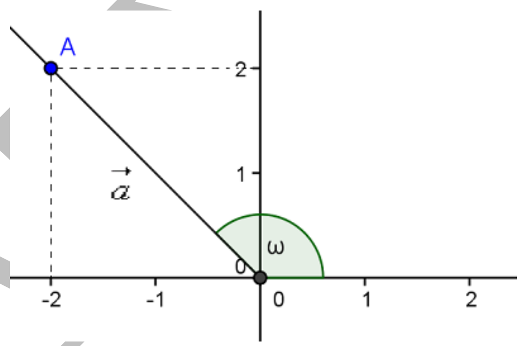
$10\lambda^2=4\cdot100\Leftrightarrow\lambda^2=40$ άρα $\lambda=\sqrt{40}$ δηλ $\lambda=2\sqrt{10}$

Έτσι $\vec{\nu}=2\sqrt{10}\cdot(3,1)=\boxed{\left(6\sqrt{10},2\sqrt{10}\right)}$

3. Είναι : $\overrightarrow{AB}=(3-1,\mu-2-\mu)=(2,-2)$

οπότε $\lambda_{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{-2}{2}$ δηλ $\lambda_{\overrightarrow{AB}}=-1$.

Η διανυσματική ακτίνα του $\overrightarrow{AB}$ είναι στο 4^0 τεταρτημόριο οπότε η γωνία του είναι : $\omega=2\pi-\dfrac{\pi}{4}$ δηλ $\boxed{\omega=\dfrac{7\pi}{4}}$



ΘΕΜΑ 4^0:

Α. 1. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά τότε

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})$

2. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$

3. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$

4. $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$

5. $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{i}^{\,2}=1$

6. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$

7. $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

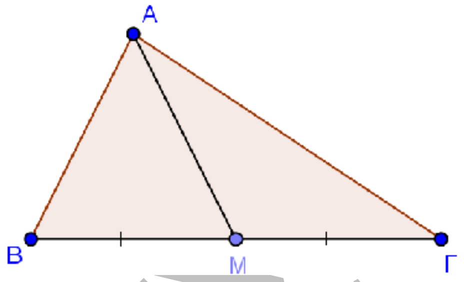
8 Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ όχι // στον y΄y τότε $\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

9. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$) και $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τότε

$\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

10. $\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\nu}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\nu},\ \ \vec{\alpha}\neq\vec{0}$

Β. 1Λ , 2Λ , 3Σ , 4Σ , 5Σ , 6Σ



Γ. 1. Είναι Μ μέσο του ΒΓ άρα

$\mathrm{M}\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2},\dfrac{2+\sqrt{3}+8-\sqrt{3}}{2}\right)$ δηλ

$\mathrm{M}(1-\sqrt{3},5)$. Άρα :

$\overrightarrow{AB}=\left(2-1,2+\sqrt{3}-2\right)=\left(1,\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AM}=(1-\sqrt{3}-1,5-2)=\left(-\sqrt{3},3\right)$

και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=1\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\cdot 3=-\sqrt{3}+3\sqrt{3}$

δηλ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=2\sqrt{3}$

2. ● $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

● $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

3. Είναι : $\sigma\upsilon\nu\, B\hat{A}M=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AM}\right|}\overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

οπότε $B\hat{A}M=\dfrac{\pi}{3}\ \ (60^0)$.