ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **92**

Β' Λυκείου

Ον/μο:……………………….. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα **10-07-14**

Θέμα 1ο:

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή . **(15 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα ομογενές σύστημα είναι αδύνατο. **Σ** **Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο . **Σ** **Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases}xy=6\\ x+y=5\end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ** **Λ**

iv. Το σύστημα $\begin{cases}x-y=3\\ 3x-3y=9\end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις . **Σ** **Λ**

v. Αν ένα σύστημα έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ** **Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}13x-7y=-1\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{3y-x}{6}=-\dfrac{1}{3}\end{matrix}\right\}$

(12 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}x+y-z=0\\ 2x-y+z=0\\ -3x+2y-z=0\end{matrix}\right\}$

(13 μον.)

Θέμα 3^{o}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ y+z=-3 \\ z+x=6 \end{array}\right\}$

(10 μον.)

Β . Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{array}\right\}$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(15 μον.)**

Θέμα 4^{o}:

Α. Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά , τότε τα κέντρα τους απέχουν 58cm. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

(10 μον.)

Β. Δίνεται το σύστημα $\left.\begin{array}{l} \lambda x+y=1 \\ x+y=\lambda \end{array}\right\}$.

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0), να βρείτε το λ ώστε να ισχύει $2x_0^2+2y_0^2=2$.

(15 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{o}:

Α. i. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

● Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\dfrac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\dfrac{\gamma}{\beta}$.

→ Αν $\alpha \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .

→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\dfrac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\dfrac{\gamma}{\beta}$.

● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Β. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2^{o}:

Α. Έχουμε : $\left.\begin{aligned} 13x-7y&=-1 \\ \frac{x}{2}-\frac{3y-x}{6}&=-\frac{1}{3}\end{aligned}\right\} \overset{}{\underset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{aligned} 13x-7y&=-1 \\ 6\cdot\frac{x}{2}-6\cdot\frac{3y-x}{6}&=-6\cdot\frac{1}{3}\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 13x-7y&=-1 \\ 3x-(3y-x)&=-2\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 13x-7y&=-1 \\ 3x-3y+x&=-2\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 13x-7y&=-1 \\ 4x-3y&=-2\end{aligned}\right\} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot(-7)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left.\begin{matrix} 39x-21y=-3 \\ -28x+21y=+14 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 11x=11 \\ 4x-3y=-2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=1 \\ y=2 \end{pmatrix}$$

Άρα (x,y)=(1,2).

Β. Είναι : $\begin{cases} x+y-z=0 & (1) \\ 2x-y+z=0 & (2) \\ -3x+2y-z=0 & (3) \end{cases}$

Το σύστημα είναι ομογενές άρα έχει τουλάχιστον μία λύση την (x,y,z)=(0,0,0).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) , (2) και προκύπτει :

$3x=0 \Leftrightarrow x=0$

προσθέτουμε κατά μέλη τις (2) , (3) και προκύπτει :

$-x+y=0 \overset{x=0}{\Leftrightarrow} y=0$

Εφόσον x=0 και y=0, έπεται ότι και z=0. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x,y,z)=(0,0,0).

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. i. $\begin{cases} x+y=7 & (1) \\ y+z=-3 & (2) \\ z+x=6 & (3) \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) , (2) , (3) και προκύπτει :

$2x+2y+2z=10 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y+z=5 \ (4)$

Αφαιρούμε από την (4) διαδοχικά τις (1) , (2) , (3) και έχουμε :

- (4)-(1) $\Rightarrow x+y+z-(x+y)=5-7 \Leftrightarrow z=-2$
- (4)-(2) $\Rightarrow x+y+z-(y+z)=5+3 \Leftrightarrow x=8$
- (4)-(3) $\Rightarrow x+y+z-(z+x)=5-6 \Leftrightarrow y=-1$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι (x,y,z)=(8,-1,-2).

Β. Έχουμε : $\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{matrix}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 4. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-5\omega+4=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=1 ή ω=4 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη

(1,4) ή (4,1) .
Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Θέμα 4ο:

Α. Έστω x και y οι ακτίνες των δύο κύκλων . Τότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=12 \\ x+y=58 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 2x=70 \\ x-y=12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=35 \\ y=23 \end{array}\right).$$

Άρα η ακτίνα του ενός κύκλου είναι 35cm και η ακτίνα του άλλου κύκλου είναι 23cm.

Β. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} \lambda x+y=1 \\ x+y=\lambda \end{array}\right\}$

Θα βρούμε τις ορίζουσες του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda-1$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=1-\lambda$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Εφόσον το σύστημα έχει μοναδική λύση πρέπει :
$D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1.$

Τότε η μοναδική λύση είναι : $(x_0, y_0)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=$

$$=\left(\frac{1-\lambda}{\lambda-1},\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1}\right)=(-1,\lambda+1).$$

Θέλουμε $2x_0^2+2y_0^2=2 \Leftrightarrow 2\cdot(-1)^2+2\cdot(\lambda+1)^2=2 \Leftrightarrow$
$2+2(\lambda+1)^2=2 \Leftrightarrow 2(\lambda+1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda+1=0 \Leftrightarrow$
$\lambda=-1.$