

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

91

Β' Λυκείου
Γεν. Παιδείας
02-02-14

Ον/μο:.....

Υλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων -
Τριγωνομετρία-Πολυώνυμα

Θέμα 1^ο:

- A.i.** Ποιες είναι οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ; (7 μον.)
- ii.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται περιοδική με περίοδο T ; (6 μον.)
- iii.** Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$. (7 μον.)

B. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

- i.** Η εξίσωση $\eta\mu x=1$ έχει άπειρες λύσεις στο διάστημα $[0,3\pi)$. Σ Λ
- ii.** Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^3 + 7x - 2$ είναι το πολύ δευτέρου βαθμού. Σ Λ
- iii.** Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x) = (2x - 1)^{2014} + 7$ είναι 8. Σ Λ
- iv.** Ένα γραμμικό σύστημα με $D = Dx = Dy = 0$ έχει πάντα άπειρες λύσεις. Σ Λ
- v.** Η συνάρτηση $f(x) = 6x^2 - 7$ έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0) = -7$. Σ Λ
- (5x1=5 μον.)

Θέμα 2^ο:

A. Δίνεται το σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} 2\eta\mu^2\theta \cdot x + 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot y = \eta\mu\theta \\ -2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + 2y = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \end{array} \right\} (\Sigma)$$

- i.** Να δείξετε ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση για κάθε γωνία θ . (8 μον.)
- ii.** Να λύσετε το σύστημα. (7 μον.)

B. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει :

$$D^2 + Dx^2 + Dy^2 = 2D - 6Dx + 4Dy - 14$$

τότε να λύσετε το σύστημα .

(10 μον.)

Θέμα 3^ο:

A. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x - 5\alpha + 1$,

το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 - 4$, δίνει υπόλοιπο $\nu(x) = 10x + 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=-1$.

(5 μον.)

ii. Αν το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) + \kappa x + \lambda$ έχει παράγοντα το

$$x^2 + 2x - 3 , \text{ να λύσετε την εξίσωση } \frac{\lambda}{\sin^2 x} - \kappa \sqrt{3} \cdot \epsilon\phi x = 6 .$$

(7 μον.)

B . i. Να λύσετε την εξίσωση : $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.

(7 μον.)

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 \geq 0$.

(6 μον.)

Θέμα 4^ο:

A. i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi(21\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(33\pi + \theta)}$$

(7 μον.)

ii. Να αποδείξετε ότι :

$$\eta\mu^3 x (1 + \sigma\phi x) + \sigma\upsilon\nu^3 x (1 + \epsilon\phi x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

(5 μον.)

B. Αν η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$ έχει περίοδο 2π και η

γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4\eta\mu x$ και να σχεδιάσετε τη γραφική

παράσταση της f .

(5 μον.)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

(5 μον.)

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \left[\frac{1}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{2014} + f\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + [f(\pi)]^{2014}$$

(3 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. i. Οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος

2x2 είναι : * Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών .

* Μέθοδος της αντικατάστασης .

* Μέθοδος σύγκρισης .

* Μέθοδος των οριζουσών .

* Γραφική επίλυση .

ii. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

$$\alpha. x + T \in A, \quad x - T \in A \quad \text{και}$$

$$\beta. f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f .

iii. $\Rightarrow$) Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) = 0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$.

Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$$

$$\text{παίρνουμε} \quad P(x) = (x - \rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

B. i.Λ ii.Λ iii. Σ iv.Λ v.Σ

Θέμα 2^ο:

A.i. Έχουμε το σύστημα
$$\left. \begin{aligned} 2\eta\mu^2\theta \cdot x + 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot y &= \eta\mu\theta \\ -2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + 2y &= \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

i. Βρίσκουμε την ορίζουσα D του συστήματος .

$$D = \begin{vmatrix} 2\eta\mu^2\theta & 2\sigma\upsilon\nu\theta \\ -2\sigma\upsilon\nu\theta & 2 \end{vmatrix} = 4\eta\mu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta =$$

$$= 4(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Εφόσον $D \neq 0$ για κάθε γωνία θ , το (Σ) θα έχει μοναδική λύση.

ii. Θα βρούμε τις ορίζουσες D_x , D_y του (Σ)

$$*D_x = \begin{vmatrix} \eta\mu\theta & 2\sigma\upsilon\nu\theta \\ \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta & 2 \end{vmatrix} = 2\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu\theta =$$

$$= 2\eta\mu\theta(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) \stackrel{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1}{=} 2\eta\mu\theta \cdot \eta\mu^2\theta = 2\eta\mu^3\theta.$$

$$*D_y = \begin{vmatrix} 2\eta\mu^2\theta & \eta\mu\theta \\ -2\sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = 2\eta\mu^3\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta =$$

$$= 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta(\eta\mu^2\theta + 1).$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι :

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{2\eta\mu^3\theta}{4}, \frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta(\eta\mu^2\theta + 1)}{4} \right) \\ = \left(\frac{\eta\mu^3\theta}{2}, \frac{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta(\eta\mu^2\theta + 1)}{2} \right).$$

$$\text{B. Είναι : } D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 6D_x + 4D_y - 14 \Leftrightarrow$$

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D + 6D_x - 4D_y + 14 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{D^2 - 2D + 1}_{\text{ταυτ.}} + \underbrace{D_x^2 + 6D_x + 9}_{\text{ταυτ.}} + \underbrace{D_y^2 - 4D_y + 4}_{\text{ταυτ.}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(D - 1)^2 + (D_x + 3)^2 + (D_y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$D - 1 = 0 \quad \text{και} \quad D_x + 3 = 0 \quad \text{και} \quad D_y - 2 = 0 \quad \text{άρα}$$

$$D=1 \text{ και } D_x = -3 \text{ και } D_y = 2$$

Εφόσον $D=1 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{-3}{1}, \frac{2}{1} \right) = (-3, 2).$$

Θέμα 3^ο:

i. Διαιρούμε το $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x - 5\alpha + 1$ με το $x^2 - 4$

$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \alpha x - 5\alpha + 1$	$x^2 - 4$
$-x^4 \quad + 4x^2$	$x^2 + \alpha x + \beta + 4$
$\alpha x^3 + (\beta + 4)x^2 + \alpha x - 5\alpha + 1$	
$-\alpha x^3 \quad + 4\alpha x$	
$(\beta + 4)x^2 + 5\alpha x - 5\alpha + 1$	
$-(\beta + 4)x^2 \quad + 4\beta + 16$	
$5\alpha x + 4\beta - 5\alpha + 17$	

Εφόσον το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $u(x) = 10x + 3$ πρέπει

$$5\alpha x + 4\beta - 5\alpha + 17 = 10x + 3 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 5\alpha = 10 \\ 4\beta - 5\alpha + 17 = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \boxed{\alpha=2} \\ \boxed{\beta=-1} \end{array}$$

ii. Για $\alpha=2$ και $\beta=-1$ είναι $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 9$

$$\text{Οπότε } Q(x) = P(x) + \kappa x + \lambda = x^4 + 2x^3 - x^2 + (2 + \kappa)x + \lambda - 9$$

Το $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ άρα θα έχει παράγοντες το $x+3$ και το $x-1$ οπότε :

$$\bullet Q(-3) = 0 \Leftrightarrow 81 - 54 - 9 - 3(2 + \kappa) + \lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow 3\kappa - \lambda = 3 \quad (1)$$

$$\bullet Q(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 - 1 + 2 + \kappa + \lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 5 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) :

$$\left. \begin{array}{l} 3\kappa - \lambda = 3 \\ \kappa + \lambda = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (+) 4\kappa = 8 \\ \kappa + \lambda = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \boxed{\kappa=2} \\ \boxed{\lambda=3} \end{array}$$

Για $\kappa=2$ και $\lambda=3$ η εξίσωση $\frac{\lambda}{\sin^2 x} - \kappa\sqrt{3} \cdot \epsilon\phi x = 6$ γράφεται :

$$\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\epsilon\phi x = 6.$$

Πρέπει $\sin^2 x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Μ' αυτούς τους περιορισμούς έχουμε :

$$\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\epsilon\phi x = 6 \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \epsilon\phi^2 x \Leftrightarrow 3(1 + \epsilon\phi^2 x) - 2\sqrt{3}\epsilon\phi x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\epsilon\phi^2 x - 2\sqrt{3}\epsilon\phi x - 3 = 0 \quad \begin{matrix} \text{θέτουμε} \\ \epsilon\phi x = y \end{matrix} \Leftrightarrow 3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0$$

Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12 + 36 = 48 > 0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο

$$\text{άνισες λύσεις τις } y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{16 \cdot 3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{6} \begin{matrix} \nearrow y_1 = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \\ \searrow y_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$$

$$\text{Οπότε, } \epsilon\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

$$\begin{matrix} \text{ή} \\ \epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \end{matrix} \boxed{x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}}$$

$$\text{B. i. Είναι } x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^3)^2 + 7x^3 - 8 = 0 \quad \begin{matrix} \text{θέτουμε } x^3 = \omega \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\omega^2 + 7\omega - 8 = 0 \Leftrightarrow \omega = -8 \text{ ή } \omega = 1$$

$$\text{Οπότε } x^3 = -8 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

$$\begin{matrix} \text{ή} \\ x^3 = 1 \Leftrightarrow \end{matrix} \boxed{x = 1}$$

ii. Έχουμε: $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 \geq 0$ (1)

Από σχήμα Horner στο πολυώνυμο $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ για $\rho=1$ έχουμε :

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & -7 & +17 & -17 & 6 & 1 \\ \downarrow & 1 & -6 & 11 & -6 & \\ 1 & -6 & 11 & -6 & 0 & \end{array}$$

Οπότε η (1) γίνεται : $(x-1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \geq 0$ (2)

Από σχήμα Horner στο πολυώνυμο $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ για $\rho=1$ έχουμε :

$$\begin{array}{r|rrr|r} 1 & -6 & 11 & -6 & 1 \\ \downarrow & 1 & -5 & 6 & \\ 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Άρα η (2) δίνει :

$$(x-1)(x-1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x-1)^2 \geq 0 \\ \text{ομ. του } \alpha \end{array}$$

$$x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3. \text{ Οπότε } x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty).$$

Θέμα 4^ο:

$$\text{A. i. } A = \frac{\eta\mu\left(\frac{41\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi(21\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{35\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{25\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(33\pi + \theta)}$$

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\epsilon\phi\theta) \cdot \eta\mu\theta}{-\eta\mu\theta \cdot \epsilon\phi\theta \cdot (-\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$A = -1$$

ii. Έχουμε : $\eta\mu^3 x (1 + \sigma\phi x) + \sigma\upsilon\nu^3 x (1 + \epsilon\phi x) =$

$$\eta\mu^3 x \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right) + \sigma\upsilon\nu^3 x \left(1 + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) =$$

$$\eta\mu^3 x + \eta\mu^3 x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} =$$

$$\begin{aligned} & \eta\mu^3 x + \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu x = \\ & \eta\mu^2 x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu^2 x (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) = \\ & (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \underbrace{(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)}_1 = \\ & \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \end{aligned}$$

B. i. Εφόσον η $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$ έχει περίοδο 2π έχουμε :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ άρα } f(x) = \rho \eta\mu x .$$

Επίσης η γραφική παράσταση διέρχεται από το $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$

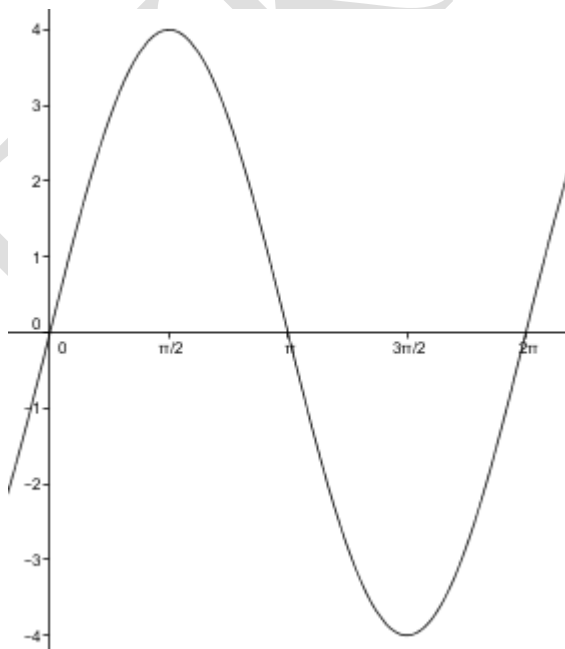
$$\text{Οπότε : } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow \rho \eta\mu \frac{\pi}{6} = 2 \Leftrightarrow \rho \cdot \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow \rho = 4.$$

Άρα , $f(x) = 4\eta\mu x$

Ο πίνακας τιμών της f είναι :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0
$4\eta\mu x$	0	4	0	-4	0

Η γραφική της παράσταση είναι :



$$\text{ii. } f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 4\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{6}\right). \text{Άρα :}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + x - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \text{ αδύνατη}$$

ή

$$x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \pi - x + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii. } A = \left[\frac{1}{4} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{2014} + f\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + [f(\pi)]^{2014}$$

$$A = \left[\frac{1}{4} \cdot 4\eta\mu\frac{\pi}{2} \right]^{2014} + 4\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 4\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + [4\eta\mu\pi]^{2014}$$

$$A = 1^{2014} + 4\eta\mu\frac{\pi}{6} - 4\eta\mu\frac{\pi}{6} + 0^{2014}$$

$$A = 1$$