ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **90**
Β' Λυκείου
Ον/μο:……………………… **Γεν. Παιδείας**
Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων - Τριγωνομετρία **10-11-13**

<u>Θέμα 1^o:</u>

Α.i. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο ; **(3 μον.)**

ii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται άρτια ; **(6 μον.)**

iii. Πως λύνουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών ; **(6 μον.)**

iv. Να αποδείξετε ότι $ημ^2ω + συν^2ω = 1$. **(5 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια . **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $g(x) = εφ5x$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{5}$. **Σ Λ**

iv. Ισχύει ότι : $συν\left(30\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $φ(x-3)+2$ είναι μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά και 2 μονάδες πάνω . **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

<u>Θέμα 2^o:</u>

Α. Αν το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+4)x + 4y = 8 \\ (\lambda+1)x + \lambda y = \lambda + 2 \end{cases}$ (Σ_1) έχει άπειρες λύσεις

να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} (2\lambda-1)x - (\lambda+3)y = 4 \\ (4\lambda+1)x - (4\lambda+7)y = \lambda + 1 \end{cases}$ (Σ_2)

είναι αδύνατο.

(12 μον.)

Β. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}(\kappa-1)x+2\kappa y=-2\\ 2\kappa x+(\kappa-1)y=\kappa-1\end{cases}$ με $\kappa\geq 0$

και D η ορίζουσα των συντελεστών του . Αν η εξίσωση

$x^2+5(D-1)x-6(D-1)^2=0$ έχει μία ρίζα διπλή :

i. Να βρεθεί το κ . **(8 μον.)**

ii. Να λυθεί το σύστημα . **(5 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία Α(1,-2) και Β(4,-3).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της . **(4 μον.)**

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x-3)\geq f(x-4)$. **(4 μον.)**

Β . i. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης

$g(x)=-\sqrt{x+2}+2$. **(5 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν η $h(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|+3}$ είναι άρτια ή περιττή. **(5 μον.)**

Γ. Να μελετήσετε την $f(x)=\varepsilon\varphi x$. **(7 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Αν $9\varepsilon\varphi^2 x=4$ και $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης $A=\dfrac{\varepsilon\varphi x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{\varepsilon\varphi x}{1+\eta\mu x}$. **(7 μον.)**

Β. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2x\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu^2\theta=0$.

i. Να λύσετε την εξίσωση . **(7 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ συναρτήσει

του θ . **(5 μον.)**

Γ. Να δείξετε ότι η παράσταση:

$$A=\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\eta\mu(\pi-x)+\eta\mu(3\pi+x)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

είναι ανεξάρτητη του x. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

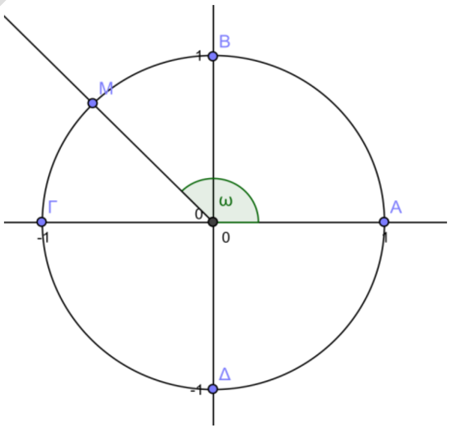
Α. i. Τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένας κύκλος με κέντρο την αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και ακτίνα 1.

ii. Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α , θα λέγεται άρτια , όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει : $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

iii. Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ με τη μέθοδο των οριζουσών , βρίσκουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος και :

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\dfrac{Dx}{D}, \dfrac{Dy}{D}\right)$.
- Αν D=0 , τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων .

iv. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$



<u>Απόδειξη</u> : Αν Μ(x,y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο , τότε θα είναι : $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και y=ημω

Επειδή όμως , (ΟΜ)=1 και

$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$

θα ισχύει : $x^2 + y^2 = 1$ οπότε θα έχουμε

$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$

Β. **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Α. Για το $\begin{cases} (\lambda + 4)x + 4y = 8 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y = \lambda + 2 \end{cases}$ (Σ_1) βρίσκουμε τις ορίζουσες .

$$D = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 4 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 4) - 4(\lambda + 1) = \lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda - 4 =$$

$$= \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}8 & 4\\ \lambda+2 & \lambda\end{vmatrix}=8\lambda-4\lambda-8=4\lambda-8=4(\lambda-2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}8 & \lambda+4\\ \lambda+2 & \lambda+1\end{vmatrix}=8(\lambda+1)-(\lambda+2)(\lambda+4)=8\lambda+8-\lambda^2-6\lambda-8=$$

$$=-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda-2)$$

Για να έχει το (Σ_1) άπειρο πλήθος λύσεων πρέπει :
$D=0$ και $D_x=0$ και $D_y=0$ είναι :

$$\left.\begin{array}{l} D=0\Leftrightarrow\lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2\\ D_x=0\Leftrightarrow\lambda=2\\ D_y=0\Leftrightarrow\lambda=0 \text{ ή } \lambda=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda=2$$

Για λ=2 το (Σ_2) γίνεται : $\left.\begin{array}{l}3x-5y=4\\ 9x-15y=3\end{array}\right\}\underset{:3}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}3x-5y=4\\ 3x-5y=1\end{array}\right\}$ άρα

το (Σ_2) είναι αδύνατο .

B. i. Έχουμε το σύστημα $\begin{cases}(\kappa-1)x+2\kappa y=-2\\ 2\kappa x+(\kappa-1)y=\kappa-1\end{cases}$ με ορίζουσα

$$D=\begin{vmatrix}\kappa-1 & 2\kappa\\ 2\kappa & \kappa-1\end{vmatrix}=\left(\kappa-1\right)^2-4\kappa^2=\kappa^2-2\kappa+1-4\kappa^2=$$

$$=-3\kappa^2-2\kappa+1 \quad (1)$$

Η εξίσωση $x^2+5(D-1)x-6(D-1)^2=0$ είναι $2^{ου}$ βαθμού ,
οπότε για να έχει διπλή λύση , πρέπει Δ=0 $\Leftrightarrow$

$$\beta^2-4\alpha\gamma=0\Leftrightarrow 25(D-1)^2+24\left(D-1\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$49\left(D-1\right)^2=0\Leftrightarrow D=1$$

Τότε η (1) $\Rightarrow -3\kappa^2-2\kappa+1=1\Leftrightarrow -3\kappa^2-2\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=0$
ή $\kappa=-\dfrac{2}{3}$ και εφόσον $\kappa\geq 0$ είναι κ=0 .

ii. Για κ=0 το σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{array}{l}(0-1)x+2\cdot 0y=-2\\ 2\cdot 0x+(0-1)y=0-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-x=-2\\ -y=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=(2,1)$$

Θέμα 3ο:

Α. i. Η f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα Α(1,-2) και Β(4 , -3) οπότε έχουμε 1<4 και $f(1)=-2>-3=f(4)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα .

ii. $f(2x-3)\geq f(x-4)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}2x-3\leq x-4\Leftrightarrow x\leq -1$.

Β. i. Η $g(x)=-\sqrt{x+2}+2$ ορίζεται όταν $x+2\geq 0\Leftrightarrow x\geq -2$

Για κάθε $x\geq -2$ έχουμε :

$\sqrt{x+2}\geq 0\Leftrightarrow -\sqrt{x+2}\leq 0\Leftrightarrow -\sqrt{x+2}+2\leq 2\Leftrightarrow g(x)\leq 2$

Η ισότητα ισχύει για x=-2 .Οπότε η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 2 για x=-2 .

ii. Είναι $h(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|+3}$. Η h ορίζεται όταν $|x|+3\neq 0\Leftrightarrow$

$|x|\neq -3$ άρα $\forall x\in\mathbb{R}$. Έχουμε $\forall x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και τότε :

$$h(-x)=\frac{(-x)^2-1}{|-x|+3}=\frac{x^2-1}{|x|+3}=h(x)$$

Επομένως η h είναι άρτια .

Γ. Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ έχει :

∗ Πεδίο ορισμού το $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq \kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

∗ Σύνολο τιμών το Β=$\mathbb{R}$.

∗ Είναι περιοδική με περίοδο Τ=π .

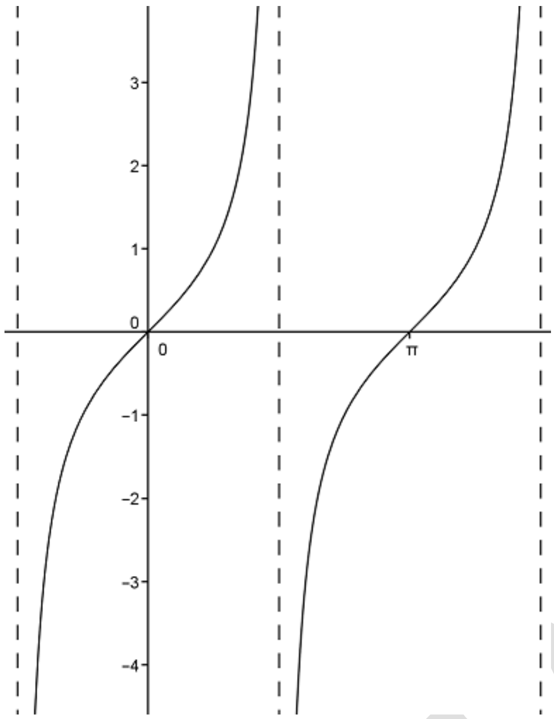
∗ Είναι περιττή , εφόσον $f(-x)=\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x=-f(x)$, οπότε έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων .

∗ Δεν έχει ακρότατα .

∗ Είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα .

∗ Έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x=\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$.

∗ Η γραφική της παράσταση είναι :



Θέμα 4ο:

Α. Είναι $9\varepsilon\varphi^2 x = 4 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \pm\frac{2}{3}$

όμως $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ άρα $\boxed{\varepsilon\varphi x = -\frac{2}{3}}$

Τότε $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1+\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{13}{9}} = \frac{9}{13}$

Οπότε Α= $\frac{\varepsilon\varphi x}{1-\eta\mu x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{1+\eta\mu x} = \frac{\varepsilon\varphi x(1+\eta\mu x)+\varepsilon\varphi x(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)} =$

$$= \frac{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi x\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x\eta\mu x}{1-\eta\mu^2 x} = \frac{2\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{9}{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{9}{13}} = -\frac{52}{27}$$

Β. i. Έχουμε την εξίσωση $x^2 - 2x\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$.

Βρίσκουμε τη διακρίνουσα , $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\eta\mu\theta)^2 - 4(-\sigma\upsilon\nu^2\theta) =$
$= 4\eta\mu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta = 4\underbrace{(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta)}_{1} = 4$

Εφόσον Δ=4>0 η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{2\eta\mu\theta \pm 2}{2}$ άρα $x_1 = \eta\mu\theta + 1$ και $x_2 = \eta\mu\theta - 1$.

ii. Είναι $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{\eta\mu\theta - 1 + \eta\mu\theta + 1}{(\eta\mu\theta + 1)(\eta\mu\theta - 1)} = \dfrac{2\eta\mu\theta}{\eta\mu^2\theta - 1}$.

Γ. $A = \eta\mu\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \eta\mu(\pi - x) + \eta\mu(3\pi + x) \cdot \eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) =$
$= -\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x - \eta\mu x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) = -\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0.$