ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **9**

Β' Λυκείου
Ον/μο:……………………… **ΕΠΑ.Λ.**
Ύλη: Συστήματα, Ιδιότητες συναρτήσεων **04-11-17**

Θέμα 1ο:

Α. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Δ λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ; **(7 μον.)**

Β. Ποια εξίσωση λέγεται γραμμική; **(6 μον.)**

Γ. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Δ λέγεται άρτια; **(7 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 5x+4y=6 \end{array}\right\}$ λύνεται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών. **Σ Λ**

ii. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ ονομάζεται γραμμική. **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $f(x)=3x^4,\ x\in[-2,7]$ δεν είναι άρτια. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} 2x^2-y=7 \\ 3x+4y=9 \end{array}\right\}$ είναι γραμμικό. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=2x^2-5x+9$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2ο: Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\}$.

Α. Να λύσετε γραφικά το σύστημα. **(7 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **(5 μον.)**

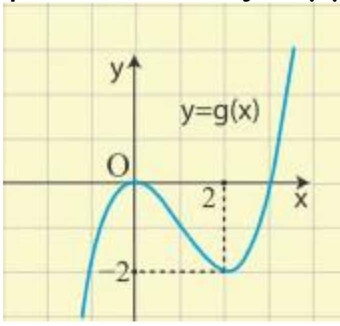
Γ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. **(7 μον.)**

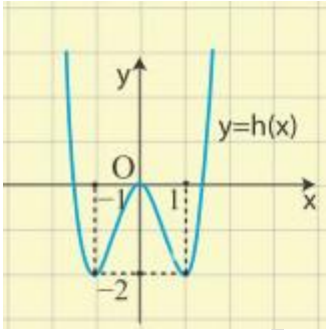
<u>Θέμα 3$^{\text{ο}}$:</u>

Α. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες τους.

i.



ii.



(2x5=10 μον.)

Β. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

i. $f(x)=-5x+4$

ii. $g(x)=2x^2-5x+4$

(2x5=10 μον.)

Γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $h(x)=x^2+7$ είναι άρτια ή περιττή.

(5 μον.)

<u>Θέμα 4$^{\text{ο}}$:</u>

Α. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{3y-1}{4}=-x+5 \\ 1-2x(y-1)=3x-y(2x-1) \end{array}\right\}$. **(10μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ 3x+y+2z=2 \\ 4x-y+3z=1 \end{array}\right\}$. **(7μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} y=2x^2 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$. **(8μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο:

Α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Δ λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Β. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ λέγεται γραμμική.

Γ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Δ, λέγεται άρτια όταν: * Για κάθε $x \in \Delta$ το $-x \in \Delta$

* $f(-x) = f(x)$.

Δ. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 5 \\ 2x + 5y = -1 \end{array}\right\} (\Sigma)$

Α. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x + 5y = -1$. Θα κατασκευάσουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Έχουμε τους εξής πίνακες τιμών των δύο ευθειών:

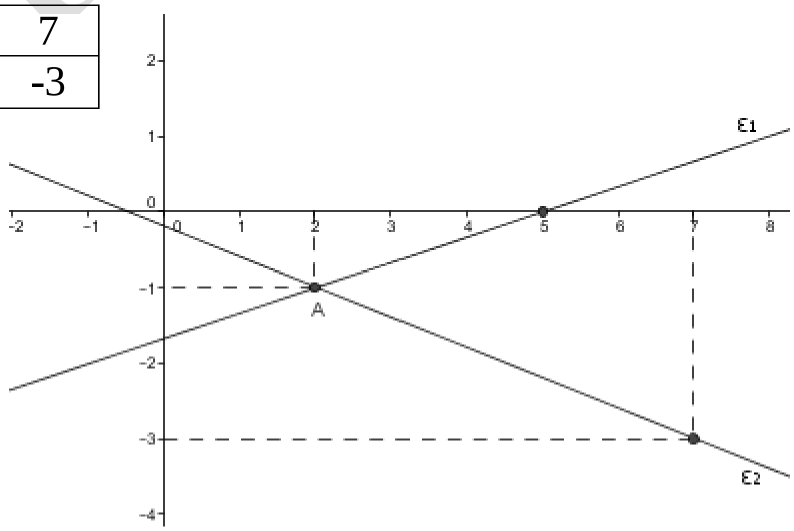
ε_1:

x	2	5
y	-1	0

ε_2:

x	2	7
y	-1	-3

Άρα έχουμε:



Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

Β. $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 2(5+3y)+5y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 10+6y+5y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 6y+5y=-1-10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3y \\ 11y=-11 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5+3\cdot(-1) \\ y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right)$

Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

Γ. $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} -2x+6y=-10 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 11y=-11 \\ x-3y=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=-1 \\ x+3=5 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} y=-1 \\ x=2 \end{array}\right)$

Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

Δ. Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών του $\left.\begin{array}{l} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{array}\right\}(\Sigma)$.

Είναι: $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=5+6=11\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

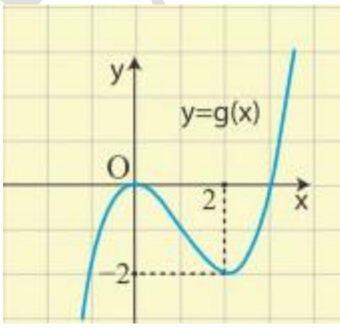
Θα βρούμε και τις άλλες ορίζουσες του (Σ). Έχουμε:

$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=25-3=22$ και $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-10=-11$

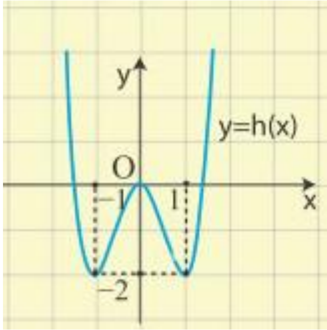
Τότε η λύση του (Σ) είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{22}{11},\frac{-11}{11}\right)=(2,-1)$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α.i.



Η g είναι $\nearrow$ στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$. Είναι $\searrow$ στο $[0,2]$.
Δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα και δεν είναι άρτια, ούτε περιττή.

ii. 

Η h είναι ↘ στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[0,1]$, ενώ είναι ↗ στα $[-1,0]$ και $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το y=-2 για $x=\pm1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Είναι άρτια εφόσον έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

Γ. i. Η $f(x)=-5x+4$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Είναι ευθεία με α=-5<0 άρα είναι γνησίως φθίνουσα και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ii. Η $g(x)=2x^2-5x+4$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Είναι παραβολή με α=2>0 άρα στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Για την κορυφή της έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot2\cdot4=25-32=-7$ και είναι:

$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{-5}{4},-\frac{-7}{8}\right)$ άρα $K\left(\frac{5}{4},\frac{7}{8}\right)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{5}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\frac{5}{4}$ το $y=\frac{7}{8}$.

Γ. Η $h(x)=x^2+7$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Οπότε:

* Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$.

* $h(-x)=(-x)^2+7=x^2+7=h(x)$.

Δηλαδή η h είναι άρτια.

Θέμα 4^{ο}:

Α. $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{3y-1}{4}=-x+5\\ 1-2x(y-1)=3x-y(2x-1)\end{array}\right\}\overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}4\cdot\dfrac{x-2y}{2}-4\cdot\dfrac{3y-1}{4}=-4x+20\\ 1-2xy+2x=3x-2xy+y\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}2(x-2y)-(3y-1)=-4x+20\\ -2xy+2x-3x+2xy-y=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}2x-4y-3y+1=-4x+20\\ -x-y=-1\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}2x-4y-3y+4x=20-1\\ x+y=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}6x-7y=19\\ x+y=1\end{array}\right\}\underset{\cdot 7}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}6x-7y=19\\ 7x+7y=7\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l}13x=26\\ x+y=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=2\\ y=1-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}x=2\\ y=-1\end{array}\right).$$

Άρα $(x,y)=(2,-1)$.

Β. $$\left.\begin{array}{ll}2x+y+z=1 & (1)\\ 3x+y+2z=2 & (2)\\ 4x-y+3z=1 & (3)\end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε τις (2), (3) κατά μέλη:

$$\left.\begin{array}{l}3x+y+2z=2\\ 4x-y+3z=1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}7x+5z=3\ (4)\ .$$

Προσθέτουμε τις (1), (3) κατά μέλη:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+z=1\\ 4x-y+3z=1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}6x+4z=2\ (5)\ .$$

Λύνουμε το σύστημα των (4) και (5):

$$\left.\begin{array}{l}7x+5z=3\\ 6x+4z=2\end{array}\right\}\underset{\cdot 5}{\overset{\cdot(-4)}{\Longleftrightarrow}}\left.\begin{array}{l}-28x-20z=-12\\ 30x+20z=10\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}2x=-2\\ 6x+4z=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x=-1\\ -6+4z=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x=-1\\ 4z=8\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}x=-1\\ z=2\end{array}\right).$$

Αντικαθιστώντας στην (1) x=-1 και z=2 έχουμε: $-2+y+2=1\Leftrightarrow y=1$.

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι: $(x,y,z)=(-1,1,2)$.

Γ. $\left.\begin{matrix} y=2x^2 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=2x^2 \\ x+2x^2=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=2x^2 & (1) \\ 2x^2+x-3=0 & (2) \end{matrix}\right\}$

Η (2) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1-4\cdot 2\cdot(-3)=1+24=25>0$. Οπότε έχει 2 άνισες λύσεις τις: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm 5}{4}=\left\langle \begin{matrix} x_1=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{4}{4}=1 \end{matrix}\right.$.

Αντικαθιστώντας τις λύσεις αυτές στην (1) προκύπτει:

$y_1=2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=2\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{2}$ και $y_2=2\cdot 1^2=2$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x,y)=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}\right)$ και $(x,y)=(1,2)$.