ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

89

Ον/μο:……………….. **Β΄Λυκείου**

Ύλη: Διανύσματα-Ευθεία **Θετ-Τεχν Κατ.**

11-11-12

Θέμα 1ο:

Α. 1) Τι ονομάζουμε γωνία ευθείας ; **(Μον.3)**

2) Τι ονομάζουμε συντελεστή διευθύνσεως ευθείας ; **(Μον.3)**

3) Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, $x_1 \neq x_2$ σημεία ευθείας (ε) να δείξετε ότι ο συντελεστής διευθύνσεως της ευθείας είναι $\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(Μον.9)**

Β. Να ορίσετε ως (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις **:**

1. Αν Α σταθερό σημείο και $|\overrightarrow{AM}| = 2$ τότε το Μ βρίσκεται σε κύκλο κέντρου Α και ακτίνας ρ=2 . **Σ Λ**

2. Αν $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$ τότε το Μ βρίσκεται στην μεσοκάθετο του ΑΒ . **Σ Λ**

3. Η παράσταση $|\overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1}|$ εκφράζει την απόσταση των σημείων M_1 και M_2 **Σ Λ**

4. Αν $\overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$ τότε τα σημεία Ο , Α , Β είναι συνευθειακά **Σ Λ**

5. Ισχύει **:** $|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ **Σ Λ**

6. Δύο παράλληλες ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης **Σ Λ**

7. Αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ τότε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ **Σ Λ**

8. Αν $\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ **,** $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$ και $\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0$ τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ **Σ Λ**

9. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon : Bx + Ay + \Gamma = 0$ **Σ Λ**

10. Αν $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \neq 0$ τότε Α , Β , Γ ομοκυκλικά **Σ Λ**

(Μον. 10)

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Θέμα 2ο:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1,2) , Β(3,-2) , Γ(1,4) .
Να βρεθούν :

1. Οι εξισώσεις των υψών $\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta$ **(Μον.7)**

2. Οι εξισώσεις των διαμέσων μ_α, μ_β **(Μον.6)**

3. Οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$ **(Μον.6)**

4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου , βαρύκεντρου και περίκεντρου (σημεία τομής υψών , διαμέσων , μεσοκαθέτων αντίστοιχα) **(Μον.6)**

Θέμα 3ο:

Δίνονται τα σημεία Α(0,-2) , Β(-1,1) και Γ(μ-1 , 2-3μ) .

1. Να δείξετε ότι , για κάθε $\mu \in \mathrm{R}$, τα σημεία Α , Β , Γ είναι κορυφές τριγώνου . **(Μον.7)**

2. Για ποια τιμή του μ το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α; **(Μον.6)**

3. Για ποια τιμή του μ είναι ισοσκελές με ΒΓ=ΑΓ ; **(Μον.6)**

4. Να δείξετε ότι το Γ κινείται σε σταθερή ευθεία . **(Μον.6)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται ότι : $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}-2\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}=\vec{0}$, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=6$, $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}|=2\sqrt{3}$.

Να αποδείξετε ότι :

1. Τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά . **(Μον.6)**

2. Το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των Α , Β **(Μον.5)**

3. $\mathrm{A\hat{P}B}=90^\circ$ **(Μον.5)**

4. Το διάνυσμα $\vec{\mathrm{V}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ **(Μον.9)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α. Θεωρία

Β. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Σ , 5Σ , 6Λ , 7Σ , 9Σ , 10Σ

Θέμα 2ο:

1. Είναι : $\upsilon_\alpha \perp \text{ΒΓ} \Rightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha} \cdot \lambda_{\text{ΒΓ}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha} \cdot \frac{4+2}{1-3} = -1 \Rightarrow \lambda_{\upsilon_\alpha} = \frac{1}{3}$

Άρα $\upsilon_\alpha : y-2 = \frac{1}{3}\cdot(x+1)$ δηλ $\upsilon_\alpha : y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

Επίσης $\upsilon_\beta \perp \text{ΑΓ} \Rightarrow \lambda_{\upsilon_\beta} \cdot \lambda_{\text{ΑΓ}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\upsilon_\text{Β}} \cdot \frac{4-2}{1+1} = -1 \Rightarrow \lambda_{\upsilon_\beta} = -1$

Άρα $\upsilon_\beta : y+2 = -1\cdot(x-3)$ δηλ $\upsilon_\beta : y = -x+1$

2. Το μέσο Μ της ΒΓ είναι το $\text{Μ}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$ δηλ Μ(2,1) οπότε :

$\mu_\alpha : y-1 = \frac{1-2}{2+1}\cdot(x-2)$ δηλ $\mu_\alpha : y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Επίσης , το μέσο Ν της ΑΓ είναι το $\text{Ν}\left(\frac{1-1}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ δηλ Ν(0,3)

οπότε $\mu_\beta : y-3 = \frac{3+2}{0-3}(x-0)$ δηλ $\mu_\beta : y = -\frac{5}{3}x + 3$

3. Είναι $\varepsilon_\alpha \parallel \upsilon_\alpha \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_\alpha} = 3$ και $\varepsilon_\alpha : y-1 = \frac{1}{3}(x-2)$ δηλ $\varepsilon_\alpha : y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

και $\varepsilon_\beta \parallel \upsilon_\beta \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_\beta} = -1$ και $\varepsilon_\beta : y-3 = -1(x-0)$ δηλ $\varepsilon_\beta : y = -x+3$

4. ● Από το σύστημα των υ_α και υ_β έχουμε : $\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -x+1 \end{array}\right| \Rightarrow$

$\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = -x+1 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$ οπότε y=-2 . Άρα Η(1,-2)

- Από σύστημα των μ_α και μ_β έχουμε : $\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \\ y=-\frac{5}{3}x+3 \end{array}\right| \Rightarrow$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}x+3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x=\frac{4}{3} \Rightarrow x=1 \text{ οπότε } y=\frac{4}{3} \quad \text{Άρα } K(2,1)$$

- Από το σύστημα των ε_α και ε_β έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ y=-x+3 \end{array}\right| \Rightarrow -\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=-x+3 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2 \text{ οπότε y=1.}$$

Αρα K(2,1).

<u>Θέμα 3^o:</u>

1. Είναι $\overrightarrow{AB}=(-1,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\mu-1,4-3\mu)$ οπότε $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=$

$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ \mu-1 & 4-3\mu \end{vmatrix}=-4+3\mu-3\mu+3=-1\neq 0$, για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

Άρα $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$, τα σημεία A , B , Γ δεν είναι συνευθειακά άρα είναι κορυφές τριγώνου .

2. Αν $\hat{A}=90^\circ$ τότε $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Rightarrow$

$(-1)\cdot(\mu-1)+3\ \ 4-3\mu\ \ =0\Leftrightarrow$

$-\mu+1+12-9\mu=0\Leftrightarrow 10\mu=13\Leftrightarrow \mu=\frac{13}{10}$

3. Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=(\mu,1-3\mu)$ οπότε ΒΓ=ΑΓ$\Rightarrow$

$\sqrt{\mu^2+(1-3\mu)^2}=\sqrt{(\mu-1)^2+(4-3\mu)^2}\Leftrightarrow$

$\mu^2+1-6\mu+9\mu^2=\mu^2-2\mu+1-16-24\mu+9\mu^2\Leftrightarrow$

$20\mu=16\Leftrightarrow \mu=\frac{4}{5}$

4. Αν Γ(x,y) τότε $\left.\begin{array}{l} x=\mu-1 \\ y=2-3\mu \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \mu=x+1 \\ y=2-3(x+1) \end{array}$

άρα $y=-3x-1$ **.** Η ευθεία είναι αυτή στην οποία κινείται το σημείο Γ.

Θέμα 4ο:

1. Από την ισότητα $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{P\Gamma})+(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{P\Gamma})=\vec{0}\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$ οπότε $\overrightarrow{A\Gamma}\parallel\overrightarrow{\Gamma B}$ με κοινό άκρο το Γ. Άρα τα σημεία Α , Β ,Γ είναι συνευθειακά .

2. Αφού $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$, το σημείο Γ είναι μέσο του ΑΒ .

3. Από την ισότητα $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{P\Gamma}$ άρα

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\ ^2=(2\overrightarrow{P\Gamma})^2\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4\overrightarrow{P\Gamma}^2\Rightarrow$$

$$6^2+(2\sqrt{3})^2+2\cdot\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4\cdot\ 2\sqrt{3}\ ^2\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0\Rightarrow\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$$

Άρα $A\hat{P}B=90^\circ$

4. Είναι $\vec{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\ \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}\ \cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\ \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{P\Gamma}\ \cdot\ \overrightarrow{P\Gamma}-\overrightarrow{PA}\ =$

$$=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{P\Gamma}^2-\overrightarrow{P\Gamma}\cdot\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}-0+\ 2\sqrt{3}\ ^2-\overrightarrow{P\Gamma}\cdot\overrightarrow{PA}=$$

$$=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}-\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}+12$$ **(1)**

Από την ισότητα $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=-\overrightarrow{PA}\Rightarrow$

$\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}\ ^2=\ -\overrightarrow{PA}\ ^2$ δηλ. $\overrightarrow{PB}^2+4\overrightarrow{P\Gamma}^2-4\cdot\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=\overrightarrow{PA}^2\Rightarrow$

$$2\sqrt{3}\ ^2+4\cdot\ 2\sqrt{3}\ ^2-4\cdot\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=6^2\Rightarrow12+48-4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=36\Rightarrow$$

$$4\cdot\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=24\Rightarrow\ \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=6.$$ **(2)**

Πάλι από την ισότητα $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{P\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{P\Gamma}=-\overrightarrow{PB}\Rightarrow$

$(\overrightarrow{PA}-2\cdot\overrightarrow{P\Gamma})^2=(-\overrightarrow{PB})^2$ δηλ $\overrightarrow{PA}^2+4\overrightarrow{P\Gamma}^2-4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=\overrightarrow{PB}^2\Rightarrow$

$$6^2+4\cdot(2\sqrt{3})^2-4\cdot\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=(2\sqrt{3})^2\Leftrightarrow$$

$$36+48-4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=12\Leftrightarrow4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=72\Leftrightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=18$$ **(3)**

Η (1) , λόγω των (2) και (3) γίνεται :

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=6-18+12\Rightarrow\vec{v}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ άρα $\vec{v}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$