

ΤΕΣΤ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

88

Β' Λυκείου
Γεν. Παιδείας
13/09/2013

Όν/μο:.....

Ύλη: Ιδιότητες Συναρτήσεων

Θέμα 1^ο:

- A.** Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα ; (12 μον.)
- B.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 ; (13 μον.)
- Γ.** Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιττή ; (13 μον.)
- Δ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** αν είναι Σωστές ή **(Λ)** αν είναι Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις :
- i.** Η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Σ Λ
- ii.** Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5$ με $x \in [-2, 2)$ είναι περιττή συνάρτηση. Σ Λ
- iii.** Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x + c)$ με $c > 0$ είναι μετατόπιση της f κατά c μονάδες αριστερά. Σ Λ
- iv.** Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(0, 3)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
- (4x3μον=12μον.)**

Θέμα 2^ο:

A. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία την

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}, \quad x > 1 \quad (10 \text{ μον.})$$

B. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$g(x) = 2 - \frac{3}{|x+6|+5} \quad (10 \text{ μον.})$$

Γ. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

i. $f(x) = \sqrt{x-7}$

ii. $g(x) = x^3 - 2x$ (2x10μον=20μον.)

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x + 2)^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης φ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f κατά 3 μονάδες αριστερά και 2 μονάδες προς τα κάτω.

(10 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

B. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

Γ. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

Δ. i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ

Θέμα 2^ο:

A. $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}, \quad x > 1$

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x_1 - 1} < -\frac{1}{x_2 - 1} \quad (1)$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad (2)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει:

$$x_1 - 1 - \frac{1}{x_1 - 1} < x_2 - 1 - \frac{1}{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

B. $g(x) = 2 - \frac{3}{|x+6|+5}$

Είναι $A_g = \mathbb{R}$. Έστω $x \in A_g$. Τότε:

$$|x+6| \geq 0 \Leftrightarrow |x+6|+5 \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{|x+6|+5} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{|x+6|+5} \geq -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{|x+6|+5} \geq 2 - \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$2 - \frac{3}{|x+6|+5} \geq \frac{7}{5} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{7}{5}$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο το $\frac{7}{5}$ για $x=-6$

Γ. i. $f(x) = \sqrt{x-7}$, $A_f = [7, +\infty)$

Έστω $x \in A_f$ τότε $-x \notin A_f$. Οπότε δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε αν είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση.

ii. $g(x) = x^3 - 2x$, $A_g = \mathbb{R}$

Έστω $x \in A_g$, τότε $-x \in A_g$ οπότε έχουμε :

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$$

Άρα η g είναι περιττή.

Δ. Είναι $\varphi(x) = f(x+3) - 2 = (x+2+3)^3 - 2 =$

$$(x+5)^3 - 2 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125 - 2 =$$

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 123$$