

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

88

Υλη: Διανύσματα

Β Λυκείου

Ον/μο:.....

24 -10- 2012

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο:

α. Να συμπληρώσετε τα κενά :

1. $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \dots\dots ||\vec{a} + \vec{\beta}|| \dots\dots ||\vec{a}| + |\vec{\beta}||$

2. Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{a} \dots \vec{\beta}$

3. Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = ||\vec{a}| - |\vec{\beta}||$ τότε $\vec{a} \dots \vec{\beta}$

(Μοv.6)

β. 1) Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, $k, \lambda \in R$ να γράψετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $k.\vec{a} + \lambda.\vec{\beta}$

2) Το διάνυσμα \vec{AB} έχει άκρα A(1,2) και B(3,7) . Να βρείτε τις συντεταγμένες του \vec{AB} και το μέτρο του \vec{AB}

3) Ο συντελεστής διεύθυνσεως ενός διανύσματος είναι αρκετός για να βρούμε τη γωνία του διανύσματος ;

(Μοv. 9)

γ. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

Σ Λ

2. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

Σ Λ

3. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

Σ Λ

4. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

Σ Λ

5. $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

Σ Λ

6. $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Σ Λ

7. $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

Σ Λ

(Μοv.14)

δ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

1. $\vec{AB} + \vec{BΓ} = \dots\dots\dots$

6. $\vec{AΓ} + \vec{ΓΔ} - \vec{BΔ} = \dots\dots\dots$

2. $\vec{AB} - \vec{ΔB} = \dots\dots\dots$

7. $\vec{ΓB} + \vec{BΔ} - \vec{AΔ} = \dots\dots\dots$

3. $\vec{AB} + \vec{BΓ} + \vec{ΓΔ} = \dots\dots\dots$

8. $\vec{AΔ} + \vec{ΔB} + \vec{BA} = \dots\dots\dots$

4. $\vec{BΔ} - \vec{ΓΔ} = \dots\dots\dots$

9. $\vec{AB} + \vec{BΔ} - \vec{ΓΔ} - \vec{AΓ} = \dots\dots\dots$

5. $\vec{AB} - \vec{ΔB} + \vec{ΔΓ} = \dots\dots\dots$

10. $\vec{AB} + \vec{BΓ} + \vec{ΓΔ} + \vec{ΔA} = \dots\dots\dots$

(Μοv. 15)

ζ. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις προτάσεις :

1. $|\vec{AB} + \vec{BC}| > |\vec{AD} + \vec{DC}|$

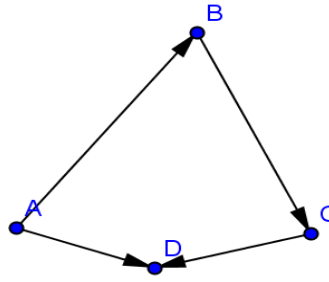
Σ Λ

2. $|\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AD} + \vec{DC}|$

Σ Λ

3. $|\vec{AB} + \vec{BC}| < |\vec{AD} + \vec{DC}|$

Σ Λ



(Μον. 6)

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

και το τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{\beta}$, $\vec{BΓ} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$ και AM διάμεσός του.

α) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

β) Να δείξετε ότι $\vec{AM} = \frac{4\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

γ) Να βρείτε το $|\vec{AM}|$

δ) Να βρείτε το $\text{syn}(\vec{AB}, \vec{AM})$

(Μον. 50)

Καλή επιτυχία

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο:

- α. 1. $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$
 2. Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$
 3. Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = ||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$

β. 1. $\kappa\vec{a} + \lambda\vec{\beta} = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2)$

2. $\overline{AB} = (3-1, 7-2) = (2, 5)$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

3. Όχι. Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η διανυσματική του ακτίνα.

γ. 1Σ, 2Σ, 3Σ, 4Λ, 5Λ, 6Λ, 7Λ

δ. 1. $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$

2. $\overline{AB} - \overline{\Delta B} = \overline{A\Delta}$

3. $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{A\Delta}$

4. $\overline{B\Delta} - \overline{\Gamma\Delta} = \overline{B\Gamma}$

5. $\overline{AB} - \overline{\Delta B} + \overline{\Delta\Gamma} = \overline{A\Gamma}$

6. $\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} - \overline{B\Delta} = \overline{AB}$

7. $\overline{\Gamma B} + \overline{B\Delta} - \overline{A\Delta} = \overline{\Gamma A}$

8. $\overline{A\Delta} + \overline{\Delta B} + \overline{B\Delta} = \vec{0}$

9. $\overline{AB} + \overline{B\Delta} - \overline{\Gamma\Delta} - \overline{A\Gamma} = \vec{0}$

10. $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta A} = \vec{0}$

ε. 1Λ, 2Σ, 3Λ

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο:

α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\overset{\wedge}{\vec{a}}, \vec{\beta}\right) = 1 \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

β) $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{A\Gamma}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{AB} + \overline{B\Gamma}}{2} = \frac{2(\vec{a} + \vec{\beta}) + 2\vec{a} - 3\vec{\beta}}{2} = \frac{4\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

γ) $|\overline{AM}|^2 = \left(\frac{4\vec{a} - \vec{\beta}}{2}\right)^2 = \frac{16\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{4} = \frac{16 \cdot 1^2 + 2^2 - 8 \cdot 1}{4} = 3$

άρα $|\overline{AM}| = \sqrt{3}$

$$\delta) \text{ συν}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} \quad (1)$$

Είναι :

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \frac{4\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2} = \frac{4\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2}{2} =$$

$$= \frac{4\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2}{2} = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\bullet |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2^2 = 7$$

$$\text{άρα } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7}$$

$$\text{Η (1) γίνεται : } \text{ συν}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{21}}{2 \cdot 21} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$