ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **87**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα **04-07-13**

Θέμα 1^{o}:

Α.i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή. **(7 μον.)**

ii. Ποιες είναι οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους; **(8 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\begin{matrix} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{matrix}$ ισχύει ότι D=0, τότε το σύστημα είναι αδύνατο. **Σ Λ**

iii. Αν για ένα γραμμικό σύστημα 2x2 ισχύει $D=D_x=D_y=0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\left.\begin{matrix} \lambda x-y=\lambda-1 \\ 2x+\lambda y=\lambda^2 \end{matrix}\right\}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

v. Η ευθεία x+y=7 και η υπερβολή $x\cdot y=12$ δεν έχουν κοινά σημεία. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{o}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} \frac{x-1}{2}+\frac{y+2}{6}=0 \\ 3(x+2)-5(y-6)=35 \end{matrix}\right\}$

(12 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ -5x-4y-z=0 \end{matrix}\right\}$

(13 μον.)

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{aligned} x+y&=6 \\ y+z&=-2 \\ z+x&=4 \end{aligned}\right\}$

(10 μον.)

Β . Να λύσετε το σύστημα : $\begin{aligned} x+y&=5 \\ x\cdot y&=6 \end{aligned}$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(15 μον.)**

<u>Θέμα 4^o:</u>

Α. Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16 .Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες , ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι .Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο ;

(10 μον.)

Β. Αν το σύστημα : $\left.\begin{aligned} \alpha^2 x+2y&=1 \\ 2\alpha x+\alpha y&=1 \end{aligned}\right\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική λύση την (x_0,y_0) και ισχύει $2x_0+y_0=1$, τότε να βρεθεί το α .

(15 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^o:

Α. i. $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

● Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = -\alpha x + \gamma \Leftrightarrow y = \frac{-\alpha}{\beta} x + \frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

→ Αν $\alpha \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .

→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

ii. Οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος 2x2 είναι :
* Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών .
* Μέθοδος της αντικατάστασης .
* Μέθοδος σύγκρισης .
* Μέθοδος των οριζουσών .
* Γραφική επίλυση .

Β. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2^{o}:

Α. Έχουμε : $\left.\begin{matrix}\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+2}{6}=0\\ 3(x+2)-5(y-6)=35\end{matrix}\right\}\overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}\left.\begin{matrix}6\cdot\dfrac{(x-1)}{2}+6\cdot\dfrac{(y+2)}{6}=0\\ 3x+6-5y+30=35\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$$\begin{matrix}3(x-1)+(y+2)=0\\ 3x-5y=-1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}3x-3+y+2=0\\ 3x-5y=-1\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix}3x+y=1\\ 3x-5y=-1\end{matrix}\ \overset{\Leftrightarrow}{\cdot(-1)}\ \begin{matrix}3x+y=1\\ -3x+5y=1\end{matrix}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{matrix}6y=2\\ 3x+y=1\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}y=\dfrac{1}{3}\\ 3x+\dfrac{1}{3}=1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y=\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$\text{άρα}\quad x,y\ =\left(\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right)$$

Β. Είναι : $\begin{cases}x+2y-z=0 & (1)\\ 2x+y+z=0 & (2)\\ -5x-4y-z=0 & (3)\end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη την (1)(2) και προκύπτει :

$3x+3y=0\overset{:3}{\Leftrightarrow}x+y=0\quad(4)$

προσθέτουμε κατά μέλη την (2) , (3) και προκύπτει :

$-3x-3y=0\overset{:(-3)}{\Leftrightarrow}\ x+y=0\quad(5)$

Από τις (4) , (5) $\begin{matrix}x+y=0\\ x+y=0\end{matrix}$

προκύπτει ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(x,-x),\ x\in\mathbb{R}$

Επομένως το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=(x,-x,-x),x\in\mathbb{R}$

Επομένως το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x,y,z\ =\ x,-x,-x\ ,x\in\mathbb{R}$

Θέμα 3ο:

Α. i. $\begin{cases} x+y=6 & (1) \\ y+z=-2 & (2) \\ z+x=4 & (3) \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) , (2) , (3) και προκύπτει :

$$2x+2y+2z=8 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y+z=4 \;\; (4)$$

Αφαιρούμε από την (4) διαδοχικά τις (1) , (2) , (3) και έχουμε :

- (4)-(1) $\Rightarrow$ $x+y+z-(x+y)=4-6 \Leftrightarrow z=-2$
- (4)-(2) $\Rightarrow$ $x+y+z-(y+z)=4+2 \Leftrightarrow x=6$
- (4)-(3) $\Rightarrow$ $x+y+z-(z+x)=4-4 \Leftrightarrow y=0$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι (x,y,z)=(6,0,-2)

Β. Έχουμε : $\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{matrix}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-5\omega+6=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=2 ή ω=3 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,3) ή (3,2) .

Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Θέμα 4ο:

Α. Έστω Φ ο βαθμός της Φυσικής και Χ της Χημείας .Τότε :

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\Phi+X}{2}=16 \\ \Phi-2=X+4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Phi+X=32 \\ \Phi-X=6 \end{matrix} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} 2\Phi=38 \\ \Phi-X=6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Phi=19 \\ X=13 \end{matrix}$$

Άρα το πρώτο τρίμηνο ο μαθητής είχε στη Φυσική βαθμό 19 και στη Χημεία βαθμό 13 .

Β. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} \alpha^2x+2y=1 \\ 2\alpha x+\alpha y=1 \end{matrix}\right\}$

Θα βρούμε τις ορίζουσες του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix}\alpha^2 & 2\\ 2\alpha & \alpha\end{vmatrix}=\alpha^3-4\alpha=\alpha(\alpha^2-4)=\alpha(\alpha-2)(\alpha+2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha-2$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\alpha^2 & 1\\ 2\alpha & 1\end{vmatrix}=\alpha^2-2\alpha=\alpha(\alpha-2)$$

Εφόσον το σύστημα έχει μοναδική λύση πρέπει :
$D\neq 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-2)(\alpha+2)\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 2$ και $\alpha\neq -2$

Τότε η μοναδική λύση είναι : $x_0, y_0 = \left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=$

$$=\left(\frac{\alpha-2}{\alpha(\alpha-2)(\alpha+2)},\frac{\alpha(\alpha-2)}{\alpha(\alpha-2)(\alpha+2)}\right)=\left(\frac{1}{\alpha(\alpha+2)},\frac{1}{\alpha+2}\right).$$

Θέλουμε $2x_0+y_0=1 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha(\alpha+2)}+\frac{1}{\alpha+2}=1 \Leftrightarrow$

$$\alpha(\alpha+2)\frac{2}{\alpha(\alpha+2)}+\alpha(\alpha+2)\frac{1}{(\alpha+2)}=\alpha(\alpha+2)\Leftrightarrow$$

$2+\alpha=\alpha(\alpha+2)\Leftrightarrow 2+\alpha=\alpha^2+2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha-2=0\Leftrightarrow$
$\alpha=-2$ ή $\alpha=1$
Όμως $\alpha\neq -2$ άρα τελικά **α=1**