ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

87

Ον/μο:……………….. **Β΄Λυκείου**

Ύλη: Ευθεία-Κύκλος **Θετ-Τεχν Κατ.**

29-1-12

Θέμα 1ο:

Α. α. Πως ορίζεται η γωνία ω που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον x΄x και τι τιμές παίρνει ; Πότε είναι ω=0 και πότε $\omega=\frac{\pi}{2}$; **(Μον.3)**

β. Πως ορίζεται η κλίση μιας ευθείας ε; Πότε είναι θετική , πότε αρνητική και πότε δεν ορίζεται ; **(Μον.2)**

γ. Αν $A(x_0, y_0)$ σημείο από το οποίο διέρχεται μια ευθεία ε και λ ο συντελεστής διευθύνσεώς της να δείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι $y-y_0=\lambda\cdot(x-x_0)$ **(Μον.10)**

Β. Να ορίσετε ως (Σ) ή (Λ) τις προτάσεις **:**

1. Η εξίσωση $(\alpha+1)\cdot x+(\alpha^2-1)y+10=0$ παριστάνει πάντα ευθεία . **Σ Λ**

2. Η εξίσωση $y-2=\lambda(x-3),\quad \lambda\in R$ παριστάνει για τις διάφορες τιμές του λ όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α(3,2) **Σ Λ**

3. Ο κύκλος $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2$ εφάπτεται στον $y'y$ **Σ Λ**

4. Έστω οι κύκλοι $x^2+(y-2)^2=4$ και $(x-2)^2+y^2=4$. Το σημείο Μ(1,1) είναι εσωτερικό και των δύο κύκλων **Σ Λ**

5. Η εξίσωση $x^2-y^2+2x-4y-4=0$ παριστάνει κύκλο **Σ Λ**

(Μον. 10)

www.efklidis.edu.gr *Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)*

Θέμα 2^{o}:

Δίνονται οι εξισώσεις : $\varepsilon_1 : \lambda x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\lambda+1)x - (1-\lambda)y + 4 = 0$

1. Να δείξετε ότι καθεμία από τις εξισώσεις αυτές παριστάνει ευθεία . **(Μον.4)**

2. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η ε_1 να είναι παράλληλη στην $\zeta_1 : 4x - 2y + 3 = 0$ **(Μον.4)**

3. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η ε_2 να είναι κάθετη στην $\zeta_2 : x - 3y + 4 = 0$ **(Μον.5)**

4. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 **(Μον.6)**

5. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε_2 διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε $\lambda \in R$ **(Μον.6)**

Θέμα 3^{o}:

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ και $\varepsilon : x - y + 1 = 0$

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση C_1 παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα . **(Μον.5)**

2. Να βρεθούν τα κοινά σημεία του C_1 και της ε . **(Μον.5)**

3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 + \lambda(x - y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο C_λ για κάθε $\lambda \in R$ **(Μον.5)**

4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων K_λ των κύκλων C_λ **(Μον.5)**

5. Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε ο κύκλος C_λ να εφάπτεται στην ευθεία $\zeta : x + 3y - 7 = 0$ **(Μον.7)**

Θέμα 4ο:

Α. Δίνεται η εξίσωση $C:(2x-1)^2+4y^2=4$

1. Να δείξετε ότι η C παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},0\right)$ και ακτίνα ρ=1 **(Μον.8)**

2. Να δείξετε ότι το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι εσωτερικό του κύκλου C και να βρείτε την ευθεία (ε) που ορίζει στον κύκλο χορδή με μέσο το Α **(Μον.8)**

3. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου των οποίων η απόσταση από το Ο είναι μέγιστη και ελάχιστη **(Μον.4)**

Β. Αν η εξίσωση $C:(\lambda^2-2\mu)x^2-(\mu^2+1)y^2+2\lambda x-y+2\mu=0$ παριστάνει κύκλο , να βρείτε τα λ και μ **(Μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α. Θεωρία **Β.** 1Λ , 2Λ , 3Σ , 4Σ , 5Λ

Θέμα 2ο:

1. Η (ε_1) έχει Α=λ , Β=-1 $\neq 0$ άρα παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in R$
Η (ε_2) έχει $A = \lambda + 1, \quad B = -(1-\lambda)$ τα οποία δεν μηδενίζονται συγχρόνως άρα παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in R$

2. Είναι $\varepsilon_1 // \zeta_1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta$ δηλ **λ=2**

3. Είναι $\varepsilon_2 \perp \zeta_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \cdot \lambda_\zeta = -1$ δηλ. $\frac{\lambda+1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{3} = -1$ και $\lambda \neq 1 \Leftrightarrow$
$\lambda + 1 = -3(1-\lambda) \Leftrightarrow \lambda + 1 = -3 + 3\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 2}$

4. Έστω $\vec{\delta_1} = (1,\lambda) // \varepsilon_1$ και $\vec{\delta_2} = (1-\lambda, \lambda+1) // \varepsilon_2$. Τότε :

$$\sigma\upsilon\nu(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \sigma\upsilon\nu(\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}) = \frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|} = \frac{1\cdot(1-\lambda)+\lambda(\lambda+1)}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2}} =$$

$$= \frac{1-\lambda+\lambda^2+\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{\lambda^2+2\lambda+1+1-2\lambda+\lambda^2}} =$$

$$\frac{\lambda^2+1}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+2}} = \frac{\lambda^2+1}{\sqrt{\lambda^2+1}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\lambda^2+1}{\sqrt{2}(\lambda^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$. Άρα $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 45^0$

5. $\left.\begin{array}{l} \Gamma\iota\alpha\ \lambda=0 \Rightarrow \varepsilon_2 : x - y + 4 = 0 \\ \Gamma\iota\alpha\ \lambda=1 \Rightarrow \varepsilon_2 : 2x + 4 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = 2 \\ x = -2 \end{array}$. Άρα οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο Μ(-2,2) .Για το σημείο αυτό η (ε_2) γίνεται :
$(\lambda+1)\cdot(-2) - (1-\lambda)\cdot 2 + 4 = -2\lambda - 2 - 2 + 2\lambda + 4 = 0$ δηλ.
επαληθεύεται .Άρα όλες οι ευθείες ε_2 διέρχονται από το <u>Μ(-2,2)</u>

<u>Θέμα 3ο:</u>

1. Η εξίσωση $C_1: x^2+y^2-2x+4y-11=0$ γράφεται
$(x^2-2x)+(y^2+4y)=11 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=11+5 \Leftrightarrow$
$\underline{(x-1)^2+(y+2)^2=16}$. Άρα παριστάνει κύκλο κέντρου **<u>K(1,-2)</u>** και ακτίνας **<u>ρ=4.</u>**

2. Από το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-11=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y=x+1 \quad (1) \\ x^2+(x+1)^2-2x+4(x+1)-11=0 \end{array}$$

δηλ. $x^2+x^2+2x+1-2x+4x+4-11=0 \Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0 \Leftrightarrow$
$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x=1}}$ **ή** $\underline{\mathbf{x=-3}}$

Αν $x=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} y=2$

Αν $x=-3 \overset{(1)}{\Rightarrow} y=-2$.Άρα ο κύκλος C_1 και η ευθεία ε τέμνονται στα σημεία **<u>A(1,2)</u> και <u>B(-3,-2)</u>**

3. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται :

$x^2+y^2-2x+4y-11+\lambda x-\lambda y+\lambda=0 \Leftrightarrow$

$\underline{x^2+y^2+(\lambda-2)x+(4-\lambda)y+\lambda-11=0}$ με

$A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda-2)^2+(4-\lambda)^2-4(\lambda-11)=$

$=\lambda^2-4\lambda+4+16-8\lambda+\lambda^2-4\lambda+44=2\lambda^2-16\lambda+64=$

$=2(\lambda^2-8\lambda+32)$.

Το τριώνυμο $\lambda^2-8\lambda+32$ έχει $\Delta=(-8)^2-4\cdot 32=-64<0$ οπότε είναι ομόσημο του 1 δηλ θετικό για κάθε $\lambda \in R$. Η εξίσωση λοιπόν $\underline{C_\lambda: x^2+y^2+(\lambda-2)x+(4-\lambda)y+\lambda-11=0}$

παριστάνει κύκλο με κέντρο $K_\lambda\left(\dfrac{-\lambda+2}{2}, \dfrac{\lambda-4}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{2(\lambda^2-8\lambda+32)}}{2}$$

4. Αν $K_\lambda(x,y)$ τότε $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-\lambda+2}{2} \\ y=\dfrac{\lambda-4}{2}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda=-2x+2 \\ \lambda=2y+4\end{array}\right\} \Leftrightarrow -2x+2=2y+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{x+y+1=0}$. Η ευθεία αυτή είναι ο γ.τ των K_λ

5. Πρέπει d(K,ζ)=ρ δηλ. $\dfrac{\left|\dfrac{2-\lambda}{2}+3\dfrac{\lambda-4}{2}-7\right|}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{2\lambda^2-16\lambda+64}}{2} \Leftrightarrow$

$|\lambda-12|=\sqrt{5\lambda^2-40\lambda+160} \Leftrightarrow \lambda^2+144-12\lambda=5\lambda^2-40\lambda+160 \Leftrightarrow$

$4(\lambda^2-4\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda=2}$

Θέμα 4ο:

Α. 1. Η εξίσωση $C:(2x-1)^2+4y^2=4$ γράφεται :

$$\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+4y^2=4 \Leftrightarrow 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4y^2=4 \Leftrightarrow \underline{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1} \quad (1)$$

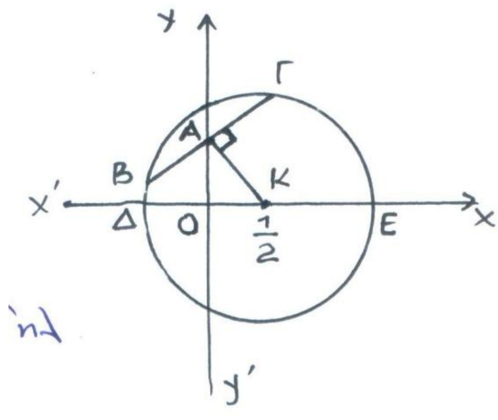
Και επομένως παριστάνει κύκλο κέντρου $K\left(\frac{1}{2},0\right)$ και ρ=1

2. Για το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ η (1) δίνει $\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$

$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1$ =ρ, άρα το Α είναι το εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Αν Α μέσο της χορδής ΒΓ τότε

ΑΚ $\perp$ ΒΓ. Είναι $\lambda_{AK}=\dfrac{0-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-0}=-1$



Άρα $\lambda_{B\Gamma}=1$ και η ΒΓ έχει εξίσωση

$B\Gamma: y-y_A=\lambda\cdot(X-X_A)$ δηλ.

$y-\frac{1}{2}=1\cdot(x-0)$ δηλ $B\Gamma: y=x+\frac{1}{2}$

3. Η ελάχιστη απόσταση είναι η ΟΔ και η μέγιστη ΟΕ .

Για $y=0$ η (1) $\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=1$ ή $x-\frac{1}{2}=-1 \Leftrightarrow$

$x=\frac{3}{2}$ ή $x=-\frac{1}{2}$.Άρα $\underline{\Delta\left(-\frac{1}{2},0\right)}$ και $\underline{E\left(\frac{3}{2},0\right)}$.

Β. Πρέπει κατ'αρχάς να είναι $\lambda^2-2\mu=-(\mu^2+1)\neq 0$ άρα

$\lambda^2-2\mu+\mu^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2+(\mu^2-2\mu+1)=0 \Leftrightarrow \lambda^2+(\mu-1)^2=0 \Leftrightarrow$

<u>λ=0</u> και **<u>μ=1</u>**

Τότε : $C:-2x^2-2y^2-y+2=0$ δηλ $C:x^2+y^2+\frac{1}{2}y-1=0$

με $A^2+B^2-4\Gamma=0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}>0$

Άρα η C είναι κύκλος .