ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **86**

Β' Λυκείου
Ον/μο:……………………… **Γεν. Παιδείας**
Ύλη: Όλη **10-03-13**

Θέμα 1^{ο}:

Α.i. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο ;

ii. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ .

iii. Αν $1\neq \alpha > 0$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι :

$\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$. **(3x5=15μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. $3 = \log_5 5^3 = 9^{\log_9 3}$. **Σ Λ**

ii. Οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $3x^5 + \omega x^4 - 2x^3 + 7 = 0$ είναι $\pm 1, \pm 7$. **Σ Λ**

iii. Αν το σύστημα $\begin{matrix} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{matrix}$ έχει δύο λύσεις , τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων . **Σ Λ**

iv. Η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2$ είναι περιττή . **Σ Λ**

v. Η εξίσωση συνx=5ω με $|\omega| \leq \frac{1}{5}$ έχει άπειρες λύσεις . **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + x^3 + \beta x^2 + x - 6$

i. Αν η f(x) έχει ρίζα το 2 και παράγοντα το x+3 να βρείτε τα α και β . **(8 μον.)**

ii. Αν α=1 και β=-5 να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον x΄x . **(10 μον.)**

Β. Να λύσετε την εξίσωση :

$\sigma\upsilon\nu^4 x + \sigma\upsilon\nu^3 x + 5\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 11 = 0$. **(7 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται το σύστημα : $\begin{cases} (\lambda+\ln e^2)x+\log_2 4\cdot y=\lambda & ,\lambda\in\mathbb{R} \\ 5^{\log_5 6}\cdot x+\log 10^4\cdot \lambda y=\lambda+1 \end{cases}$

i. Να αποδείξετε ότι :
$D=4(\lambda-1)(\lambda+3),\ D_x=2(\lambda-1)(2\lambda+1),\ D_y=(\lambda-1)(\lambda-2)$. **(8 μον.)**

ii. Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$. **(4 μον.)**

Β. i. Να λύσετε την εξίσωση : $\sqrt{x+2}+2=\sqrt{x-6}$. **(6 μον.)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση **:** $5^{\ln x}-3^{\ln x-1}=3^{\ln x+1}-5^{\ln x-1}$. **(3 μον.)**

iii. Να λύσετε την εξίσωση **:** $2^{x-1}=5^x$. **(4 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{2013},\quad x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης καθώς και την περίοδος της. **(3 μον.)**

ii. Να λυθεί η εξίσωση $2013\cdot g(x)+1=2$. **(4 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι : $g\left(x+\dfrac{7\pi}{2}\right)+g\left(x-\dfrac{13\pi}{2}\right)=0$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **(3 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x^3+x-2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **(8 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι : $f(3)-f(2)=\log 7-\log 2$. **(4 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι : $\log_{1736} f(1736)\cdot\log_{f(1736)} e\cdot\log_e 1736^e=e$.

(3 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α.i. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν :

$f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

ii. Η ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ γράφεται :

$P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$.

Επειδή ο διαιρέτης x-ρ είναι πρώτου βαθμού , το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε :

$P(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x) + \upsilon$ και αν θέσουμε x=ρ , παίρνουμε

$P(\rho) = (\rho-\rho)\cdot\pi(\rho) + \upsilon = 0 + \upsilon = \upsilon$.

Επομένως $\upsilon = P(\rho)$

iii. Θα δείξουμε ότι $\log_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$.

Θέτουμε $\log_\alpha\theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1$ (1)

$\log_\alpha\theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2$ (2)

Τότε έχουμε :

$$\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \log_\alpha\left(\frac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}}\right) = \log_\alpha\alpha^{x_1-x_2} = x_1 - x_2 \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}$$

$$\log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2 .$$

Β. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.**Σ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Α. $f(x) = \alpha x^4 + x^3 + \beta x^2 + x - 6$

i. Εφόσον η f έχει ρίζα το 2 και παράγοντα το x+3 θα είναι :

$$\begin{matrix} f(2)=0 \\ f(-3)=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 16\alpha+8+4\beta+2-6=0 \\ 81\alpha-27+9\beta-3-6=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 16\alpha+4\beta=-4 \\ 81\alpha+9\beta=36 \end{matrix} \underset{:(-9)}{\overset{:4}{\Leftrightarrow}}$$

$$\begin{matrix} 4\alpha+\beta=-1 \\ -9\alpha-\beta=-4 \end{matrix} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} -5\alpha=-5 \\ 4\alpha+\beta=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha=1 \\ \beta=-5 \end{matrix}$$

Οπότε $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.

ii. Για να είναι η C_f πάνω από τον x΄x , πρέπει f(x)>0 δηλαδή

$x^4+x^3-5x^2+x-6>0 \ (1)$

Εφόσον γνωρίζουμε ότι η f έχει ρίζα το 2 και παράγοντα το x+3

θα είναι $f(x)=(x-2)(x+3)A(x)=(x^2+x-6)A(x)$.

Διαιρούμε το $x^4+x^3-5x^2+x-6$ με το x^2+x-6 και έχουμε

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-5x^2+x-6 & x^2+x-6 \\ \cline{2-2} -x^4-x^3+6x^2 & x^2+1 \\ \hline x^2+x-6 & \\ -x^2-x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Οπότε $f(x)=(x^2+x-6)(x^2+1)=(x-2)(x+3)(x^2+1)$

Τότε η $(1)\Rightarrow (x-2)(x+3)(x^2+1)>0 \ (2)$

- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$
- $x^2+1=0$ αδύνατη

Οπότε ο πίνακας προσήμων της f είναι :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f		+	0	-	0	+	

Τελικά η $(2)\Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

B. $συν^4x+συν^3x+5ημ^2x+συνx-11=0 \Leftrightarrow$

$συν^4x+συν^3x+5(1-συν^2x)+συνx-11=0 \Leftrightarrow$

$συν^4x+συν^3x-5συν^2x+συνx-6=0$

Θέτουμε συνx=ω κι έχουμε $ω^4+ω^3-5ω^2+ω-6=0$

Από το Α. έχουμε ότι : ω=2 ή ω=-3 οπότε

$συνx=2$ αδύνατη εφόσον $-1\le συνx \le 1$

ή

$συνx=-3$ αδύνατη (ομοίως) .

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Α. i. $\left.\begin{array}{l}(\lambda+\ln e^2)x+\log_2 4\cdot y=\lambda\\ 5^{\log_5 6}\cdot x+\log 10^4\cdot \lambda y=\lambda+1\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l}(\lambda+2)x+2y=\lambda\\ 6x+4\lambda y=\lambda+1\end{array}$

$$D=\begin{vmatrix}\lambda+2 & 2\\ 6 & 4\lambda\end{vmatrix}=4\lambda(\lambda+2)-12=4(\lambda^2+2\lambda-3)=4(\lambda-1)(\lambda+3).$$

$$D_x=\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda+1 & 4\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^2-2(\lambda+1)=4\lambda^2-2\lambda-2=2(2\lambda^2-\lambda-1)=$$

$$=2(2\lambda^2-2\lambda+\lambda-1)=2\left[2\lambda(\lambda-1)+(\lambda-1)\right]=2(\lambda-1)(2\lambda+1).$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda+2 & \lambda\\ 6 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+1)-6\lambda=\lambda^2+3\lambda+2-6\lambda=$$

$$=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2).$$

ii. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $D\neq 0\Leftrightarrow 4(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -3$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την :

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{2(\lambda-1)(2\lambda+1)}{4(\lambda-1)(\lambda+3)},\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{4(\lambda-1)(\lambda+3)}\right)=$$

$$=\left(\frac{2\lambda+1}{2(\lambda+3)},\frac{\lambda-2}{4\lambda+3}\right).$$

- Αν $D=0$ τότε λ=1 ή λ=-3

  ∗ Αν λ=1 το σύστημα γίνεται : $\begin{array}{l}3x+2y=1\\ 6x+4y=2\end{array}\underset{:2}{\Leftrightarrow}$

  $\begin{array}{l}3x+2y=1\\ 3x+2y=1\end{array}$ οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=\left(x,\dfrac{1-3x}{2}\right)$.

  ∗ Αν λ=-3 το σύστημα γίνεται : $\begin{array}{l}-x+2y=-3\\ 6x-12y=-2\end{array}\overset{\cdot(-6)}{\Leftrightarrow}$

  $\begin{array}{l}6x-12y=18\\ 6x-12y=-2\end{array}$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο .

Β. i. $\sqrt{x+2}+2=\sqrt{x-6}$

Πρέπει $\begin{matrix} x+2\geq 0 \\ x-6\geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq -2 \\ x\geq 6 \end{matrix} \Leftrightarrow x\geq 6$

Τότε $\left(\sqrt{x+2}+2\right)^2=\left(\sqrt{x-6}\right)^2 \Leftrightarrow x+2+4\sqrt{x+2}+4=x-6 \Rightarrow$

$4\sqrt{x+2}=-12 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-3$ αδύνατη εφόσον $\sqrt{x+2}\geq 0$.

ii. $5^{\ln x}-3^{\ln x-1}=3^{\ln x+1}-5^{\ln x-1}$

Πρέπει x>0 τότε έχουμε :

$$5^{\ln x}+5^{\ln x-1}=3^{\ln x+1}+3^{\ln x-1} \Leftrightarrow 5^{\ln x}+\frac{5^{\ln x}}{5}=3^{\ln x}\cdot 3+\frac{3^{\ln x}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{6\cdot 5^{\ln x}}{5}=\frac{10\cdot 3^{\ln x}}{3} \Leftrightarrow \frac{5^{\ln x}}{3^{\ln x}}=\frac{10\cdot 5}{3\cdot 6} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\ln x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2} \Leftrightarrow$$

$\ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$.

iii. $2^{x-1}=5^x \Leftrightarrow \log 2^{x-1}=\log 5^x \Leftrightarrow (x-1)\log 2=x\log 5 \Leftrightarrow$

$x\log 2-\log 2=x\log 5 \Leftrightarrow x(\log 2-\log 5)=\log 2 \Leftrightarrow$

$$x=\frac{\log 2}{\log 2-\log 5}.$$

<u>Θέμα 4°:</u>

Α. $g(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{2013}, \quad x\in\mathbb{R}$.

i. Εφόσον $-1\leq \sigma\upsilon\nu 3x\leq 1$ θα είναι $-\dfrac{1}{2013}\leq g(x)\leq \dfrac{1}{2013}$

Άρα η ελάχιστη τιμή της g είναι $-\dfrac{1}{2013}$ και η μέγιστη $\dfrac{1}{2013}$.

Η g έχει περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{3}$ εφόσον είναι της μορφής ασυν(ωx).

ii. $2013\cdot g(x)+1=2 \Leftrightarrow 2013\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3x}{2013}+1=2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x=1 \Leftrightarrow$

$$3x=2\kappa\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{3},\quad \kappa\in\mathbb{Z}.$$

iii. $g\left(x+\dfrac{7\pi}{2}\right)+g\left(x-\dfrac{13\pi}{2}\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(3x+\dfrac{21\pi}{2}\right)}{2013}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(3x-\dfrac{39\pi}{2}\right)}{2013}=$

$$=\frac{1}{2013}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2}+3x\right)+\sigma\upsilon\nu\left[-\left(\frac{39\pi}{2}-3x\right)\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{2013}\quad -\eta\mu 3x-\eta\mu(-3x)\quad =\frac{1}{2013}\quad -\eta\mu 3x+\eta\mu 3x\quad =0.$$

B. $f(x)=\log\ x^3+x-2\ .$

i. Για να ορίζεται η f πρέπει $x^3+x-2>0$ (1) .
Από το σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε :

1	0	1	-2	1
↓	1	1	2	
1	1	2	0	

Οπότε $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$

Η (1) $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+2)>0$ και εφόσον $x^2+x+2>0$
(Δ=-7<0 άρα το τριώνυμο ομόσημο του α=1) , θα πρέπει
$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$
Άρα $A_f=(1+\infty)$.

ii. $f(3)-f(2)=\log\ 3^3+3-2\ -\log(2^3+2-2)=\log 28-\log 8=$

$$=\ \log\frac{28}{8}=\log\frac{7}{2}=\log 7-\log 2\ .$$

iii. Είναι $\log_{1736} f(1736)\cdot\log_{f(1736)} e\cdot\log_e 1736^e\ =$

$$e\cdot\log_{1736} f(1736)\cdot\log_{f(1736)} e\cdot\log_e 1736 \overset{\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}}{\underset{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}{=}}$$

$$e\cdot\frac{\log f(1736)}{\log 1736}\cdot\frac{\log e}{\log f(1736)}\cdot\frac{\log 1736}{\log e}=e\cdot 1=e$$