ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ον/μο:……………….. **Β΄Λυκείου**
Ύλη: Κεφάλαιο: Διανύσματα **Θετ-Τεχν Κατ.**
6-11-11

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α.1.Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}^{\,2}=\left|\vec{\alpha}\right|^2$. **(Μον. 5)**

2.Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$ να αποδείξετε ότι
$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ **(Μον. 6)**

Β. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

1. $\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=$......................

2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\,....\,\vec{\beta}$

3. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ οχι || στον $y'y$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $1+\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=$................

4. $\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=$................ **(Μον. 8)**

Γ.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) ή (Λ).

1. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|=0$

2. $\vec{i}\cdot\vec{j}+\vec{i}^{\,2}=1$

3.Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1y_1+x_2y_2$

(Μον. 6)

Θέμα 2ο:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2$, $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^o$ και το

τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{B\Gamma}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ και ΑΜ διάμεσός του.

α.Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. **(Μον. 6)**

β.Να δείξετε ότι: $\vec{AM}=\dfrac{4\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$. **(Μον. 7)**

γ. Να δείξετε ότι: $\vec{AM}=\sqrt{3}$. **(Μον. 6)**

δ.Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}}\right)$. **(Μον. 6)**

Θέμα 3ο:

Αν $\vec{OA}+2\vec{OB}-3\vec{O\Gamma}=\vec{0}$, $|\vec{OA}|=|\vec{OB}|=1$ και $|\vec{O\Gamma}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

α.Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **(Μον. 6)**

β.Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ. **(Μον. 6)**

γ.Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA},\vec{OB}$ είναι ορθογώνια. **(Μον. 6)**

δ.Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\vec{OA},\vec{O\Gamma}$ είναι οξεία. **(Μον. 7)**

Θέμα 4ο:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Έστω ότι για το διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύουν $\left(\vec{x}-2\vec{\alpha}\right)//\vec{\beta}$ και $\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)//\vec{\alpha}$

α.Να εξετάσετε αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά. **(Μον. 5)**

β.Να αποδείξετε ότι: $\vec{x}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. **(Μον. 8)**

γ.Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2}\right)\cdot\vec{\beta}$. **(Μον. 6)**

δ.Να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}$. **(Μον. 6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α.1.Θεωρία **2.**Θεωρία

Β.1. $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

2. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

3. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq y'y$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $1+\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=0$

4. $\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Γ.1.Σ, **2.**Σ, **3.**Λ

Θέμα 2^{o}:

α. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1\cdot2\cdot\sigma\upsilon\nu60^{o}=2\cdot\frac{1}{2}=1$

β. Είναι $\vec{AM}=\frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2}=\frac{\vec{AB}+\vec{AB}+\vec{B\Gamma}}{2}=\frac{2\vec{AB}+\vec{B\Gamma}}{2}=\frac{2\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)+2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}}{2}$ άρα

$\vec{AM}=\frac{4\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$.

γ. $\left|\vec{AM}\right|^2=\left|\frac{4\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\left(4\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\frac{1}{4}\left(16\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-8\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)=\frac{16\cdot1^2+2^2-8\cdot1}{4}=\frac{12}{4}=3$ άρα

$\vec{AM}=\sqrt{3}$.

δ. Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}}\right)=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AM}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AM}\right|}$

● $\vec{AB}\cdot\vec{AM}=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\frac{4\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}=\frac{4\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2}{2}=\frac{4\cdot1^2+3\cdot1-2^2}{2}=\frac{3}{2}$

● $\left|\vec{AB}\right|^2=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=1^2+2^2+2\cdot1=7\Rightarrow\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{7}$

Η (1)$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}})=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{2\cdot3\cdot7}=\frac{\sqrt{21}}{14}$

<u>Θέμα 3^o:</u>

α. Έχουμε ότι $\vec{OA}+2\vec{OB}-3\vec{O\Gamma}=\vec{0}$ οπότε

$\vec{OA}-\vec{O\Gamma}=2\vec{O\Gamma}-2\vec{OB}\Leftrightarrow\vec{\Gamma A}=2\vec{B\Gamma}\Leftrightarrow\vec{\Gamma A}\,//\,\vec{B\Gamma}$ και επειδή Γ κοινό άκρο τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

β. Αφού $\vec{\Gamma A}=2\vec{B\Gamma}$ το Γ είναι μεταξύ των B και A.

B Γ A

γ. Απ' την $\vec{OA}+2\vec{OB}-3\vec{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{OA}+2\vec{OB}=3\vec{O\Gamma}$ άρα $\left(\vec{OA}+2\vec{OB}\right)^2=\left(3\vec{O\Gamma}\right)^2$ δηλ.

$$\vec{OA}^2+4\vec{OB}^2+4\vec{OA}\,\vec{OB}=9\vec{O\Gamma}^2\Leftrightarrow 1^2+4\cdot1^2+4\vec{OA}\,\vec{OB}=9\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2\Leftrightarrow 5+4\vec{OA}\,\vec{OB}=9\cdot\frac{5}{9}\Leftrightarrow$$

$$4\vec{OA}\,\vec{OB}=0\Leftrightarrow\vec{OA}\,\vec{OB}=0\Leftrightarrow\vec{OA}\perp\vec{OB}$$

δ. Απ' την $\vec{OA}+2\vec{OB}-3\vec{O\Gamma}=0\Leftrightarrow\vec{OA}-3\vec{O\Gamma}=-2\vec{OB}$ άρα

$$\left(\vec{OA}-3\vec{O\Gamma}\right)^2=\left(-2\vec{OB}\right)^2\Leftrightarrow\vec{OA}^2+9\vec{O\Gamma}^2-6\cdot\vec{OA}\cdot\vec{O\Gamma}=4\vec{OB}^2\Leftrightarrow 1^2+9\cdot\frac{5}{9}-6\cdot1\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\vec{OA},\vec{O\Gamma}\right)=4\cdot1^2$$

$$\Leftrightarrow 6-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\vec{OA},\vec{O\Gamma}\right)=4\Leftrightarrow-2\sqrt{5}\sigma\upsilon\nu\left(\vec{OA},\vec{O\Gamma}\right)=-2\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\vec{OA},\vec{O\Gamma}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\rangle 0$$

άρα $\left(\widehat{\vec{OA},\vec{O\Gamma}}\right)\langle 90^o$

<u>Θέμα 4^o:</u>

α. Αφού $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$ είναι $\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$.

β. Αφού $\vec{x}-2\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ και $\vec{x}-\vec{\beta}\parallel\vec{\alpha}$ θα υπάρχουν λ, μ∈R ώστε:

$$\left.\begin{matrix}\vec{x}-2\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}\\ \vec{x}-\vec{\beta}=\mu\vec{\alpha}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\vec{x}=2\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\ (1)\\ \vec{x}=\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{\beta}+\mu\vec{\alpha}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\lambda\vec{\beta}\Leftrightarrow$$

$$(2-\mu)\vec{\alpha}=(1-\lambda)\vec{\beta}\ \ (2)$$

Επειδή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{2\pi}{3}$ άρα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ όχι παράλληλα θα είναι 2-μ=0 και 1-λ=0⇔

μ=2 και λ=1. Έτσι, από (1)⇒ $\vec{x}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

γ. Θεωρία.

δ. Είναι: $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{\alpha}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\cdot\vec{\alpha}=\frac{\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\cdot\vec{\alpha}=\frac{2\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}\cdot\vec{\alpha}=\frac{2\cdot1^2+1\cdot2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}}{1^2}\cdot\vec{\alpha}=$

$$\left(2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$$