ΤΕΣΤ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

85
Β' Λυκείου
Γεν. Παιδείας
07-02-13

Ον/μο:……………………….
Ύλη: Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θέμα 1^o:

Α. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x; **(15μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ)=0. **(19μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **Σ**(**Σ**ωστό) ή **Λ**(**Λ**άθος):

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού με ένα πολυώνυμο 2^{ου} είναι το πολύ 1^{ου} βαθμού. **Σ Λ**

ii. Έστω μία πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές. Αν το $\rho \neq 0$ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου τότε το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης. **Σ Λ**

iii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x+3 είναι το P(-3). **Σ Λ**

iv. Δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^3+(\lambda^2-3\lambda+2)x+\lambda-1$ να είναι 0^{ου} βαθμού. **Σ Λ**

(4x4=16μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$ έχει παράγοντα το (x-1)(x-2). **(15μον.)**

Β. i. Να λύσετε την εξίσωση $5x^3-7x^2-x+3=0$. **(10μον.)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση $5x^6-7x^4-x^2+3=0$. **(6μον.)**

iii. Να λύσετε την ανίσωση $5x^3-7x^2-x+3\leq 0$. **(9μον.)**

Γ. i. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x}{2x-6}\geq\dfrac{3}{x-3}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+7}=x+5$. **(2x5=10μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Ονομάζουμε πολυώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Β. ($\Rightarrow$) Έστω ότι το χ-ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε:

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για x=ρ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(x).

($\Leftarrow$) Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή ισχύει P(ρ)=0. Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

παίρνουμε $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$,

που σημαίνει ότι το x-ρ είναι παράγοντας του P(x).

Γ. i.Λ **ii.**Λ **iii.**Σ **iv.**Σ

Θέμα 2ο:

Α. Από σχήμα Horner για ρ=1 στο $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$ έχουμε:

1 ↓	-3 1	5 -2	-9 3	6 -6	1
1	-2	3	-6	0	

Άρα $P(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6)$ (1). Από σχήμα Horner για ρ=2 στο $\pi(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ έχουμε:

1 ↓	-2 2	3 0	-6 6	2
1	0	3	0	

Άρα $\pi(x)=(x-2)(x^2+3)$ (2). Από (1),(2) έπεται ότι $P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+3)$. Επομένως το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)(x-2)$.

B.i. Έχουμε την εξίσωση $5x^3-7x^2-x+3=0$. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου δηλαδή $\pm1,\pm3$.

Από σχήμα Horner για ρ=1 στο $5x^3-7x^2-x+3$ έχουμε:

5 ↓	-7 5	-1 -2	3 -3	1
5	-2	-3	0	

Άρα η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $(x-1)(5x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0 \Leftrightarrow \mathbf{x=1}$.

ή

$5x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow 2x^2+3x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)+3(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$2x(x-1)+3(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+3x+3)=0$ δηλαδή

$x-1=0 \Leftrightarrow \mathbf{x=1}$ ή $5x+3=0 \Leftrightarrow \mathbf{x=-\frac{3}{5}}$.

ii. Έχουμε την εξίσωση $5x^6-7x^4-x^2+3=0$. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής: $5\omega^3-7\omega^2-\omega+3=0$. Από το προηγούμενο ερώτημα οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι

$\boldsymbol{\omega=1}$ ή $\boldsymbol{\omega=-\frac{3}{5}}$. Εφόσον $x^2=\omega$ έχουμε τις εξής λύσεις:

$x^2=1 \Leftrightarrow \mathbf{x=\pm1}$ ή $x^2=-\frac{3}{5}$ **αδύνατη**.

iii. Έχουμε την ανίσωση $5x^3-7x^2-x+3\le0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} (x-1)(5x^2-2x-3)\le0$

Ο πίνακας προσήμων του γινομένου είναι:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
Γ		-	0	+	0	+	

Τελικά έχουμε ότι $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{5}\right]\cup 1$.

Γ.i. Είναι $\dfrac{x}{2x-6}\geq\dfrac{3}{x-3}\Leftrightarrow\dfrac{x}{2x-6}-\dfrac{3}{x-3}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x}{2(x-3)}-\dfrac{3}{x-3}\geq 0$

Έχουμε Ε.Κ.Π.$=2(x-3)$ και πρέπει $x\neq 3$.Τότε:

$\dfrac{x}{2(x-3)}-\dfrac{3}{x-3}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x-6}{2(x-3)}\geq 0$. Για το πρόσημο του πηλίκου αυτού, αρκεί να βρούμε το πρόσημο του γινομένου $(x-6)(x-3)$.

Ο πίνακας προσήμων του γινομένου είναι:

x	$-\infty$		3		6		$+\infty$
Γ		+	‖	-	0	+	

Άρα η ανίσωση επαληθεύεται για $x\in(-\infty,3)\cup[6,+\infty)$.

ii. Έχουμε $\sqrt{x+7}=x+5$. Αρχικά πρέπει $x+7\geq 0\Leftrightarrow x\geq -7$ και εφόσον $\sqrt{x+7}\geq 0$ πρέπει και $x+5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5$. Τότε έχουμε:

$\sqrt{x+7}=x+5\Leftrightarrow(\sqrt{x+7})^2=(x+5)^2\Leftrightarrow x+7=x^2+10x+25\Leftrightarrow$

$x^2+9x+18=0$ δηλαδή $\mathbf{x=-3}$ ή x=-6 απορ.